JOSÉ RAFAEL SANTOS FURLANETTO

Sobre Equações Elípticas e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier

Curitiba / PR

2007

Dedicado aos nove da Sociedade...

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelas lições e graças recebidas ao longo de toda minha vida. Sou grato a meus pais Maria Eliza e Hélio (*in memoriam*) pelo esforço para que eu estudasse. Agradeço também a minha esposa Fernanda pelo apoio, amor e carinho não-decrescentes e a meu orientador, Professor João Batista de Mendonça Xavier, por ter aceitado me orientar e por, muitas vezes, ter me tratado mais como um filho do que como um aluno. Finalmente, gostaria de agradecer a todos aqueles que, mesmo apenas com torcida, colaboraram para que eu chegasse até este ponto.

Mais uma vez afirmo meu mais sincero e profundo muito obrigado!

SUMÁRIO

RESUMO

O objetivo central deste texto é expor uma teoria de solubilidade, segundo [20] e [6], para problemas de valores de fronteira da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f\left(x, u, \nabla u\right) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador elíptico do tipo a ser detalhado posteriormente. Para este fim, utilizaremos algumas ferramentas tais como teoremas de ponto fixo de Leray-Schauder, estimativas a-priori e sub-supersolução. Iniciaremos nossos estudos com alguns conceitos básicos como Distribuições e Transformada de Fourier a fim de dar fundamentação para os itens centrais. Além disso, como estamos interessados em soluções que estão em $W^{2,p}(\Omega)$, achamos salutar incluir um breve estudo dos espaços de Sobolev e teoremas de imersão, os quais serão essenciais nas demonstrações em foco.

Palavras-chave: Teoremas de ponto fixo, Sub-supersolução, Operadores elípticos, Estimativas a-priori, Teoremas de Imersão.

ABSTRACT

The main objective of this text is to expose a solubility theory, following [20] and [6], for the boundary value problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f\left(x, u, \nabla u\right) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\mathcal{L}$ is an elliptic operator for which we will give details later. For this end, we will use tools as Fixed Points Theorems, A-priori Estimates and Upper and Lower Solutions. We will begin our studies with some basic concepts, as Distributions and Fourier Transforms, in order to give base to the central items. Besides, as we are interested in solutions that are in $W^{2,p}\left(\Omega\right)$, we found salutary to include a brief study of the Sobolev Spaces and Immersion Theorems, which will be essential in demonstrations in focus.

Key words: Fixed Points Theorems, Upper and Lower Solutions, Elliptic Operators, A-Priori Estimates, Immersion Theorems.

INTRODUÇÃO

A existência de solução para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f\,(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{F}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave e $\mathcal{L}$ é um operador elíptico, vem sendo estudada por diversos cientistas tais como Pohozaev [20], Delgado e Suárez [6], Xavier [25], [26], [27] e Ziqian [29]. O método mais utilizado por estes autores foi o de sub-supersolução, e é precisamente neste método que os principais resultados deste trabalho estão focados.

No entanto, nenhum estudo faz sentido se ele é desprovido de utilidade, isto é, se não há como aplicá-lo em algum ramo do conhecimento humano. Desta forma, sem muitos detalhes, citaremos algumas das aplicações em que a teoria exposta aqui possa ser útil. Como aplicações, temos problemas de dinâmica populacional (que veremos com mais detalhes), além de estudos relacionados a potencial elétrico, em particular o problema de se obter o potencial elétrico num meio dielétrico ausente de cargas elétricas. Também cabe citar o problema da distribuição de calor que pode, com simplicidade, ser visto como um problema da forma (F).

Outros dois focos que pautaram a construção deste trabalho foram o de permitir, para futuros interessados, uma leitura medianamente acessível (visto que exigimos conhecimentos básicos de Análise no $\mathbb{R}^n$, Análise Funcional e Teoria da Medida) e uma substancial reunião de conteúdo relacionado ao tema. É precisamente por este último motivo que incluímos, no Capítulo 1, algumas definições básicas bem como alguns resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$, além de resultados e conceitos que fundamentarão os capítulos seguintes.

No Capítulo 2, como o próprio nome já diz, introduziremos as Distribuições. Destaque especial à Transformada de Fourier pois terá papel importante quando falarmos de Solução Fundamental que, juntamente com Hipoelipticidade, são os focos do Capítulo 3. De especial atenção neste capítulo é a seção dedicada ao Laplaciano, visto que terá papel principalmente na primeira parte do Capítulo 6.

O Capítulo 4 começa a justificar o nome desta dissertação pois, pela primeira vez, trataremos de resolver problemas elípticos. Falaremos sobre problemas de Dirichlet e sobre Princípio do Máximo. Já no Capítulo 5, a fim de dar ferramentas para o Capítulo 6, introduziremos teoremas de ponto fixo de Leray-Schauder, bem como resultados relacionados a espaços de Sobolev, como teoremas de imersão.

Finalmente, o Capítulo 6, através de estimativas a-priori e do método de sub-supersolução, estabelece a solubilidade do problema (F). Inicialmente para $\mathcal{L}$ na forma de laplaciano e $p > n$ e, em seguida, para

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

e $p \leq n$.

N O T A Ç Õ E S

Tome n um número natural. Dizemos que o vetor α é um $n-$multi-índice se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ onde os α_i's são, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, inteiros não negativos.

1. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, escrevemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$;

2. Para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, denotaremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$;

3. Escreveremos $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$;

4. Além disso,
$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{i \partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{i \partial x_2} \right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{\partial}{i \partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$
e para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ definimos $D^0 u = u$ para toda função u. O leitor pode, sem a menor dificuldade, mostrar que $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$. Portanto, os operadores D^α e ∂^α são perfeitamente intercambiáveis.;

5. Por D_j, para $j = 1, 2, ..., n$, representa-se a derivação parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$;

6. Ω denotará um domínio em $\mathbb{R}^n$, ou seja, um conjunto aberto e conexo;

7. A fronteira do conjunto B será representada por ∂B;

8. $A \subset\subset \Omega$ significa A é um conjunto propriamente contido em Ω;

9. $C_0^\infty(\Omega)$, veja página 13;

10. $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$, veja página 54;

11. f_ε, veja página 9;

12. $\mathcal{D}'(\Omega)$, veja página 20;

13. $\mathcal{E}'(\Omega)$, veja página 30;

14. $\widehat{f}$, veja página 43;

15. $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_x$, veja página 54;

16. $\|f\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)}$, veja página 93;

17. $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}$ ou equivalentemente $\|\cdot\|_{\alpha}$, veja página 93;

18. S_{φ}, veja página 88;

19. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, veja página 93;

20. $\|\cdot\|_{C^2(\Omega)}$ veja página 103;

21. $\|\cdot\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}$ veja página 103;

22. $W^k\left(\Omega\right)$, veja página 113;

23. u^+ e u^-, veja página 116;

24. $W^{k,p}\left(\Omega\right)$, veja página 118;

25. $\|\cdot\|_{k,p}$, veja página 118;

26. $\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$, veja página 123;

27. $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{c} \mathcal{B}_2$, veja página 124;

28. $\hat{u}$ e $\bar{u}$, veja página 137 ou 147.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS

1.1 Conceitos Iniciais

Antes de iniciar a leitura desta seção, recomendamos que o leitor leia os primeiros cinco itens (ao menos) da tabela de notações, visto que conceitos como o de multi-índice serão apenas usados aqui.

Nesta seção inicial introduziremos algumas definições básicas bem como notações, tudo isto visando uma qualificação do discurso. Já na segunda seção, listaremos alguns belos e úteis resultados de análise no $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.1 (***Equação Diferencial***). *É uma equação cuja incógnita é uma função e, nesta equação realmente aparecem derivadas da função incógnita.*

Definição 1.1.2 (***Equação Diferencial Ordinária e Equação Diferencial Parcial***). *Quando em uma equação diferencial a função incógnita depender de uma única variável independente então esta equação será dita uma Equação Diferencial Ordinária, que simplesmente escrevemos como EDO. Do contrário, ela será dita Equação Diferencial Parcial, simplesmente EDP.*

Definição 1.1.3 (***Ordem de uma Equação Diferencial***). *Dado um número natural k, diremos que uma Equação Diferencial é de ordem k, se ela realmente depender da derivada de ordem k da função incógnita e não depender de derivadas de ordem superior a k.*

Neste contexto, conhecido o número natural k, a forma mais geral de uma Equação Diferencial Ordinária de ordem k para a função incógnita u é

$$F\left(x,u,u',u'',...,u^{(k)}\right)=0,$$

onde a função $F:\mathbb{R}^{k+2}\longrightarrow\mathbb{R}$ realmente deve depender da $k+2-$ésima variável, isto é, de $u^{(k)}=\frac{d^k u}{dx^k}$. Do mesmo modo, a forma mais geral de uma Equação Diferencial Parcial de primeira ordem para uma função incógnita u, com variáveis independentes $x_1,x_2,...,x_{k-1}$ e x_k é

$$F\left(x,u,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_k}\right)=0.$$

Nestas condições, a função $F:X\times\mathbb{R}^{k+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ deve depender de fato de ao menos uma de suas $k-$ésimas últimas coordenadas. Isto nos permite escrever de forma sintética uma EDP de ordem k, onde u é como descrita acima,

$$F\left(x,u,\partial^{\Gamma_1}u,\partial^{\Gamma_2}u,...,\partial^{\Gamma_k}u\right)=0,$$

com $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}\times...\times\mathbb{R}^{N_k}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função que realmente depende de ao menos uma das N_k-ésimas últimas variáveis e

$$\Gamma_j=\{n-\text{multi-índices }\alpha\text{ tais que }|\alpha|=j\},$$

sendo N_j o número de elementos de Γ_j. Uma notação mais simples da expressão

$$F\left(x,u,\partial^{\Gamma_1}u,\partial^{\Gamma_2}u,...,\partial^{\Gamma_k}u\right)=0$$

é a seguinte e será a que mais aparecerá em nossa notações,

$$F\left(x,(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}\right)=0.$$

Definição 1.1.4 (***Equações Diferenciais Lineares e Não Lineares***). *Toda Equação Diferencial de ordem k que tiver a forma*

$$\sum_{|\alpha|\leq k}a_\alpha(x)\,\partial^\alpha u=f(x),$$

onde $f,a_\alpha:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ são funções definidas no subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$, será dita uma equação diferencial linear. Caso contrário, a equação diferencial será dita não linear.

Definição 1.1.5 (***Equações Diferenciais Quasilineares***). *É toda equação diferencial não linear da forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k-1}\right) \partial^\alpha u = b\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k-1}\right).$$

Observação: O operador $\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha u$ é muitas vezes representada por $P(x,\partial)\,u$, ou seja,

$$P(x,\partial)\,u = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha u.$$

Por esta razão, o operador $P(x,\partial)$ é conhecido como **operador diferencial**.

Definição 1.1.6 (***Solução de uma Equação Diferencial***). *Uma função u, definida em $\Omega \subset I\!R^m$, é dita uma solução da equação diferencial*

$$F\left(x, v, \partial^{\Gamma_1} v, \partial^{\Gamma_2} v, ..., \partial^{\Gamma_n} v\right) = 0$$

se a igualdade $F\left(x, u(x), \partial^{\Gamma_1} u(x), \partial^{\Gamma_2} u(x), ..., \partial^{\Gamma_n} u(x)\right) = 0$ for satisfeita para todo $x \in \Omega$.

E, para finalizar o rol de definições básicas, damos a

Definição 1.1.7 (***Operador Elíptico***). *Seja $k \in I\!N$. Considere o operador*

$$\mathcal{L} := \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha.$$

$\mathcal{L}$ será dito um operador elíptico se a expressão

$$\sigma_x(\mathcal{L},\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \neq 0,$$

para todo $\xi \in I\!R^n$, $\xi \neq 0$.

1.2 Ferramentas de Cálculo

Iniciaremos com um teorema de muita importância pois ele, futuramente, justificará algumas passagens de certas demonstrações. Além disso, introduziremos noções como a de suporte e resultados relacionados a ela.

Teorema 1.2.1. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis com f definida numa vizinhança do ponto x_0 (exceto possivelmente no próprio x_0) e g definida numa vizinhança do infinito, ou seja, dado $m > 0$ existe $x \in Y$, com $\|x\| \geq m$, tal que podemos calcular $g(x)$. Suponha que exista um número real $\lambda > 0$ tal que*

$$f(x) = O(\|x - x_o\|^{-n+\lambda}) \text{ quando } x \longrightarrow x_0 \text{ e}$$

$$g(x) = O(\|x\|^{-n-\lambda}) \text{ se } x \longrightarrow \infty.$$

Então podemos escolher números reais positivos A e B tais que

$$\int_{\|x-x_o\|\leq A} |f(x)|\, dx < \infty \text{ e } \int_{\|x\|\geq B} |g(x)|\, dx < \infty.$$

Prova. Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ um número real, sejam

$V_n(a,r)$ o volume da bola $B(a,r)$ de centro em a e raio r e

$\omega_n(a,r)$ a área da esfera $S^{n-1}(a,r)$ de centro a e raio r.

Consideremos a função $h(x) = x - a$. Assim,

$$V_n(a,r) = \int_{\|x-a\|\leq r} dx = \frac{1}{n}\int_{\|x-a\|\leq r} n dx = \frac{1}{n}\int_{\|x-a\|\leq r} \nabla.h(x)dx$$

onde $\nabla.h(x)$ é o divergente de h no ponto x. Aplicando o Teorema da Divergência obtemos

$$V_n(a,r) = \frac{1}{n}\int_{\|x-a\|\leq r} \nabla.h(x)dx = \frac{1}{n}\int_{\|x-a\|=r} h(x).\nu(x)d\omega = \frac{r}{n}\omega_n(a,r).$$

Por outro lado, $\varphi : B(0,1) \longrightarrow B(a,r)$ dada por $\varphi(x) = rx + a$ é um difeomorfismo entre $B(0,1)$ e $B(a,r)$. Assim

$$V_n(a,r) = \int_{\|x-a\|\leq r} dx = r^n \int_{\|x\|\leq 1} dx = r^n V_n(0,1) = \frac{r^n}{n}\omega_n(0,1)$$

e substituindo, obtemos

$$\omega_n(a,r) = r^{n-1}\omega_n(0,1).$$

Agora, para cada x não nulo, existe um único $y \in B(0,1)$ e $\rho > 0$ tais que $x = \rho y$ (expressão polar de x). O elemento de volume em coordenadas polares pode ser escrito como $dx = \rho^{n-1} d\rho d\omega$, onde $d\omega$ é o elemento de área em $S^{n-1}(0,1)$. Daí, se $\rho = \|x\|$, φ for uma função de ρ e $h(x) = \varphi(\|x\|)$, então,

$$\int h(x)dx = \omega_n(0,1) \int \varphi(\rho)\, \rho^{n-1} d\rho.$$

Levando em conta que $f(x) = O(\|x - x_o\|^{-n+\lambda})$ quando x tende para x_0 e que $g(x) = O(\|x\|^{-n-\lambda})$ quando $x \to \infty$, então podemos escolher constantes positivas A,B e M satisfazendo,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M \|x - x_o\|^{-n+\lambda} \text{ sempre que } 0 < \|x - x_o\| \leq A,\ x \in X, \text{ e} \\ |g(x)| &\leq M \|x\|^{-n-\lambda} \text{ se } \|x\| \geq B,\ x \in Y. \end{aligned}$$

Mas daí,

$$\begin{aligned} \int_{0<\|x-x_o\|\leq A} |f(x)|\, dx &\leq M \int_{0<\|x-x_o\|\leq A} \frac{1}{\|x - x_o\|^{n-\lambda}} dx = M \int_{0<\|x\|\leq A} \frac{1}{\|x\|^{n-\lambda}} dx \\ &= M\omega_n(0,1) \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^A r^{n-1-(n-\lambda)} dr = M \frac{A^\lambda}{\lambda} \omega_n(0,1) < \infty. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \int_{\|x\|\geq B} |g(x)|\, dx &\leq M \int_{\|x\|\geq B} \|x\|^{-n-\lambda} dx = M \lim_{K \to \infty} \int_{B\leq\|x\|\leq K} \|x\|^{-n-\lambda} dx \\ &= M\omega_n(0,1) \lim_{K\to\infty} \int_B^K r^{n-1+(-n-\lambda)} dr = M \frac{B^{-\lambda}}{\lambda} \omega_n(0,1) < \infty, \end{aligned}$$

como procurávamos. ■

Além destes resultados, outra afirmação é a que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = 1$. A prova não oferece grande obstáculo e o leitor (caso não se disponha a fazê-la) pode encontrá-la em [28].

Definição 1.2.2 (***Suporte de uma função***). *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. O conjunto*

$$S(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$$

é chamado de suporte da função f.

O conjunto da funções contínuas em Ω com suporte compacto será denotado por $C_0^0(\Omega)$.

TEOREMA 1.2.3. *Dados $1 \leq p < \infty$ e um aberto Ω. Então o conjunto das funções contínuas em Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

PROVA. O leitor encontrará uma prova deste resultado em [21]. ■

COROLÁRIO 1.2.4. *Dados $1 \leq p < \infty$ e um aberto $\Omega \subseteq I\!R^n$, então $C_0^0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

PROVA. Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ tal que $\|f-\varphi\|_p < \varepsilon$. Pelo Teorema 1.2.3, tomemos g contínua em Ω tal que $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Defina, para cada natural n, o conjunto

$$K_n = \{x \in \Omega / d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ e } \|x\| \leq n\}.$$

Todos os K_n são compactos pois, para cada n, K_n é limitado e fechado. Além disso, temos que $K_n \subseteq int\ K_{n+1}$ e que $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$. Mostremos esta última afirmação.

Naturalmente, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq \Omega$ já que $K_n \subseteq \Omega$ para todo $n \in I\!N$. Por outro lado, seja $x \in \Omega$. Como Ω é aberto, então x é ponto interior de Ω, logo $d(x,\partial\Omega) > 0$ e, portanto, existe $\tilde{n} \in I\!N$ tal que $d(x,\partial\Omega) \geq \frac{1}{\tilde{n}}$ com $\|x\| \leq \tilde{n}$. Logo $x \in K_{\tilde{n}}$ e, por conseqüência, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

A partir desta informação obtemos que $\int_{\Omega\setminus K_n} |g(x)|^p\,dx \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Escolha então $n_0 \in I\!N$ tal que

$$\int_{\Omega\setminus K_{n_0}} |g(x)|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Tomemos $n_1 = n_0 + 1$. A função de Tietze $h : \Omega \longrightarrow I\!R$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, \overline{\Omega\setminus K_{n_1}})}{d(x, K_{n_0}) + d(x, \overline{\Omega\setminus K_{n_1}})}$$

é contínua pois seu denominador nunca se anula. Além disso, $h(x) = 1$ para $x \in K_{n_0}$, $h(x) = 0$ para $x \in \overline{\Omega \backslash K_{n_1}}$ e $0 \leq h(x) \leq 1$ em Ω.

Defina $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(x) = h(x)\, g(x)$. Naturalmente φ é contínua pois h e g são. Também temos que φ tem suporte compacto pois $S(\varphi) \subseteq K_{n_1}$ e K_{n_1} é compacto. Fica caracterizado então que φ é uma função de $C_0^0(\Omega)$. Para finalizar,

$$\begin{aligned} \|g - \varphi\|_p^p &= \int_\Omega |g(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_\Omega |g(x)|^p \, |1 - h(x)|^p \, dx \\ &= \int_{\Omega \backslash K_{n_0}} |g(x)|^p \, |1 - h(x)|^p \, dx \leq \int_{\Omega \backslash K_{n_0}} |g(x)|^p \, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como procurávamos. ■

Teorema 1.2.5. *Sejam $f, \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que, $\phi \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$, $\phi \geq 0$ e $f \in L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Para cada $\varepsilon > 0$ defina*

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y) \phi(y) \, dy.$$

Então $f_\varepsilon \in L^p$. Além disso, se p for finito, ϕ possuir suporte compacto e zero pertencer ao $S(\phi)$, então $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Prova. (1^a **Parte:** $f_\varepsilon \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$).

Caso $(p = \infty)$: Naturalmente, temos que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ *q.t.p.* Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varepsilon y)| \, \phi(y) \, dy \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \, dy = \|f\|_\infty < \infty.$$

Daí,

$$\|f_\varepsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

Caso $(p = 1)$: Nesta condição, usando o Teorema de Fubini, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varepsilon y)| \, \phi(y) \, dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varepsilon y)| \, dx \right] \phi(y) \, dy \\ &\leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \, dy = \|f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

caracterizando $f_\varepsilon \in L^1$.

Caso $(1 < p < \infty)$: Inicialmente considere,

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)|^p &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|\, \phi(y)\, dy\right]^p \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|\, \phi^{\frac{1}{p}}(y)\, \phi^{\frac{1}{q}}(y) dy\right]^p \ \left(\text{onde } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p\, \phi(y)\, dy\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy\right]^{\frac{p}{q}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p\, \phi(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Assim, usando novamente o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p\, \phi(y)\, dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p\, dx\right]\phi(y)\, dy \\
&\leq \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\, dy = \|f\|_p^p < \infty.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f_\varepsilon \in L^p$.

($\mathbf{2}^a$ **Parte:** $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.)

Seja $t > 0$ dado. Queremos mostrar que $\exists \delta > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0,\delta)$ então $\|f_\varepsilon - f\|_p < t$. Seja g contínua e de suporte compacto tal que $\|g - f\|_p < \frac{t}{2}$ (Corolário 1.2.4). Lembrando que $1 \leq p < \infty$, caso $p = 1$ então escrevemos $\phi^{\frac{1}{q}} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - g(x)|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)\, dy - g(x)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\, dy\right|^p \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|\, \phi(y)\, dy\right]^p \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|\, \phi^{\frac{1}{p}}(y)\, \phi^{\frac{1}{q}}(y)\, dy\right]^p \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p\, \phi(y)\, dy\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y) dy\right]^{\frac{p}{q}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p\, \phi(y)\, dy.
\end{aligned}$$

De posse desta desigualdade auxiliar, fazemos então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - g(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p\, \phi(y)\, dy\right] dx \quad (1.1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p\, dx\right]\phi(y) dy.
\end{aligned}$$

Sejam $S(f)$ e $S(\phi)$ os suportes de f e ϕ respectivamente. Note que a primeira integral no segundo membro da desigualdade é, na verdade, sobre o suporte da ϕ.

A função F dada por $F(x,y) = |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p$ é uniformemente contínua em $A = [S(f) + \varepsilon S(\phi)] \times S(\phi)$ (pois F é contínua no compacto A). Podemos então escolher $\delta > 0$ de modo que $|f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p < \frac{t^p}{2^p med\ A}$, $\forall (x,y) \in A$, desde que $\varepsilon \in (0,\delta)$. Além disso, F anula-se para pontos fora de A pois se $F(c,s) \neq 0$ para algum $s \in S(\phi)$ então temos apenas duas situações possíveis:

1) $f(c-\varepsilon s) \neq 0$, o que nos levaria a $c - \varepsilon s \in S(f)$ e, portanto, a c pertencente a $S(f) + \varepsilon S(\phi)$ $(c = c - \varepsilon s + \varepsilon s)$ ou

2) $g(c) \neq 0$, o que daria que $c \in S(f) + \varepsilon S(\phi)$ dado que zero pertence ao suporte de ϕ.

Conseqüentemente, a desigualdade (1.1) fica reescrita para $t \in (0,\delta]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - g(x)|^p\, dx \ &\leq \ \int_{S(\phi)} \left[\int_A |f(x-\varepsilon y) - g(x)|^p\, dx \right] \phi(y) dy \\ &< \ \frac{t^p}{2^p med\ A} \int_A dx \int_{S(\phi)} \phi(y) dy = \left(\frac{t}{2}\right)^p . \end{aligned}$$

E isto mostra que $\|f_\varepsilon - g\|_p < \frac{t}{2}$. Conseqüentemente, se $\varepsilon \in (0,\delta)$,

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

como procurávamos. ∎

Capítulo 2

INTRODUÇÃO ÀS DISTRIBUIÇÕES

2.1 Funções Teste

Iniciaremos esta seção com o importante conceito de Função Teste.

Definição 2.1.1 (***Função Teste***). *Seja* $\Omega \subseteq I\!R^n$, Ω *aberto. Uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *será chamada de função teste em* Ω *se* f *for de classe* $C^{\infty}(\Omega)$ *e se o seu suporte for compacto.*

Denotaremos o espaço das funções teste em Ω *por* $C_0^{\infty}(\Omega)$, *isto é,*

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ f \in C^{\infty}(\Omega) \ \ e \ S(f) \ \text{é compacto}\} .$$

Observações: $i)$ O espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e também pode ser denotado por $C_c^{\infty}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$.

$ii)$ Como usualmente, quando $\Omega = I\!R^n$ denota-se $C_0^{\infty}(I\!R^n)$ simplesmente por C_0^{∞}.

$iii)$ Fica natural denotarmos o conjunto das funções de classe $C^k(\Omega)$ $(k \in I\!N)$ possuindo suporte compacto por $C_0^k(\Omega)$.

Exemplo 2.1.2. *Seja ϕ a seguinte função:*

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\|x\|^2-1}}, \text{ caso } \|x\| < 1 \text{ e} \\ \\ 0, \text{ se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Então ϕ é uma função teste real. Além disso, se multiplicarmos ϕ por uma constante $c > 0$ conveniente obteremos uma outra função φ com as seguintes propriedades

$$\varphi \in C^{\infty},\ \varphi \geq 0,\ \int_{I\!R^n} \varphi(x)dx = 1 \text{ e } S(\varphi) = \overline{B(0,1).}$$

Exemplo 2.1.3. *Dados $\Omega \subset I\!R^n$, Ω aberto, e $a \in \Omega$. Considere $\delta > 0$ tal que $B(a, 2\delta)$ esteja contida em Ω. A função*

$$\phi_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\|x-a\|^2-\delta}}, \text{ para } \|x-a\| < \delta \text{ e} \\ \\ 0, \text{ se } \|x-a\| \geq \delta, \end{cases}$$

é uma função de $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Proposição 2.1.4 (***Regularização de funções***). *Seja $1 \leq p < \infty$. Então o espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Prova. Como $C_0^0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ (Corolário 1.2.4), então basta mostrarmos que $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $C_0^0(\Omega)$. Sejam então $f \in C_0^0(\Omega)$ uma função qualquer e $\varphi : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ de modo que $\varphi \in C^{\infty}$, $\varphi \geq 0$, $\int_{I\!R^n} \varphi(y)dy = 1$ e $S(\varphi) = \overline{B(0,1)}$ (Exemplo 2.1.2). Note que $\varphi \in L^1$.

Estendendo f como zero $I\!R^n \backslash \Omega$ e dado $\varepsilon > 0$, defina, para $x \in I\!R^n$,

$$f_{\varepsilon}(x) = \int_{S(\varphi)} f(x - \varepsilon y)\varphi(y)\,dy \tag{2.1}$$

Pelo Teorema 1.2.5 temos que $\|f_{\varepsilon} - f\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Falta, portanto, mostrarmos que $f_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Através de uma mudança de variáveis, obtemos que

$$\int_{S(\varphi)} f(x-\varepsilon y)\varphi\left(y\right)dy = \varepsilon^{-n}\int_{\hat{S}(\varphi)} f(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy,$$

onde $\hat{S}\left(\varphi\right)$ é o conjunto no qual $S(\varphi)$ foi transformado pela mudança de variáveis. Esta última integral, juntamente com o fato de que $\varphi \in C^{\infty}$, nos diz que podemos derivar (sob o sinal de integração e em relação a x) f_{ε} quantas vezes desejarmos. Em outras palavras, temos $f_{\varepsilon} \in C^{\infty}$. Agora, seja $c \in \mathbb{R}^{n}$ tal que $f_{\varepsilon}\left(c\right) \neq 0$ ou equivalentemente $\int_{S(\varphi)} f(c-\varepsilon y)\varphi\left(y\right)dy \neq 0$. Logo, existe $y \in S\left(\varphi\right)$ tal que $f\left(c-\varepsilon y\right) \neq 0$. Mas isto quer dizer que $c-\varepsilon y \in S(f)$ e daqui concluímos que $c \in S(f)+\varepsilon S(\varphi)$ $(c = c-\varepsilon y+\varepsilon y)$. Fica caracterizado então que $\{x \in \Omega\ ;\ f_{\varepsilon}\left(x\right) \neq 0\} \subseteq S\left(f\right)+\varepsilon S\left(\varphi\right)$ e portanto,

$$\overline{\{x \in \Omega; f_{\varepsilon}\left(x\right) \neq 0\}} \subseteq \overline{S\left(f\right)+\varepsilon S\left(\varphi\right)}$$

ou equivalentemente,

$$S(f_{\varepsilon}) \subseteq S\left(f\right)+\varepsilon S\left(\varphi\right).$$

Concluímos então que $S(f_{\varepsilon})$ é limitado pois $S\left(f\right)+\varepsilon S\left(\varphi\right)$ é. E como $S(f_{\varepsilon})$ é por definição fechado, segue que $S(f_{\varepsilon})$ é compacto. Com isso fica evidenciado o fato de que $f_{\varepsilon} \in C_{0}^{\infty}\left(\Omega\right)$, como procurávamos. ■

Observações: *i*) Dada uma função f de $L^{p}\left(\Omega\right)$, com $1 \leq p < \infty$, a função f_{ε} dada em (2.1) é uma função de $C^{\infty}\left(\Omega\right) \cap L^{p}\left(\Omega\right)$ e é chamada de função regularizante da função f.

ii) O espaço $C_{0}^{\infty}\left(\Omega\right)$ não é denso em $L^{\infty}\left(\Omega\right)$ pois tomando $f \equiv 1$ em Ω, temos $f \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$ e no entanto, $\|f-\varphi\|_{\infty} \geq 1$ seja qual for $\varphi \in C_{0}^{\infty}\left(\Omega\right)$.

Definição 2.1.5 (***Função localmente integrável***). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n}$, Ω aberto. Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ será dita localmente integrável em Ω se satisfizer*

$$\int_{K} \left|f\left(x\right)\right|^{p} dx < \infty, \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Denotaremos o conjunto das funções localmente integráveis em Ω por $L_{loc}^{p}\left(\Omega\right)$.

Proposição 2.1.6. $L^p_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)\,,\ 1 \leq p < \infty.$

Prova. Trivialmente $L^1_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$. Sejam $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e um compacto $K \subseteq \Omega$ quaisquer. Tome

$$g \equiv \begin{cases} 1, \text{ para } x \in K \\ 0, \text{ se } x \notin K \end{cases}.$$

Como $med(K) < \infty$ pois K é compacto, temos que $g \in L^q(K)$, onde q é o expoente conjugado de p.

$$\begin{aligned} \int_K |f(x)|\, dx &= \int_K |f(x)|\, g(x)dx \leq \left[\int_K |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_K g^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_K |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} [med(K)]^{\frac{1}{q}} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ já que K foi tomado arbitrariamente. ∎

Teorema 2.1.7. *Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aberto, e $K \subset \Omega$, com K não vazio, então existe uma função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(x) = 1$ para x numa vizinhança de K e, além disso, também temos $0 \leq \psi(x) \leq 1$ em Ω.*

Prova. Sejam $\varepsilon > 0$ tal que $d(K, \partial\Omega) > 4\varepsilon$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)dy = 1$ e $S(\varphi) = \overline{B(0,1)}$. Defina

$$K_1 = \{x \in \Omega \ ; \ d(x, K) \leq \varepsilon\} \text{ e } K_2 = \{x \in \Omega \ ; \ d(x, K_1) \leq \varepsilon\}\,.$$

Note que $K \subset K_1 \subset K_2$ (e como $K \neq \emptyset$, segue que K_1 e K_2 também são). Tome agora, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in K_2 \\ 0, \text{ caso } x \notin K_2 \end{cases}$ e então defina $f_\varepsilon(x) = \int_{S(\varphi)} f(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy$. Afirmamos que esta função f_ε, para $x \in \Omega$, possui as propriedades procuradas $(f_\varepsilon = \psi)$.

De fato, como já vimos na prova da Proposição 2.1.4, $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Além disso, como $\varphi \geq 0$ e f vale um ou zero, então $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$. Resta-nos mostrar que existe uma vizinhança V_k de K tal que $f_\varepsilon(x) = 1$ seja qual for x em V_K. Para isto, tome $c \in K_1$ e $y_0 \in S(\varphi)$ elementos quaisquer. Então,

$$d(c - \varepsilon y_0, K_1) \leq d(c - \varepsilon y_0, c) = \|c - \varepsilon y_0 + c\| = \|\varepsilon y_0\| \leq \varepsilon.$$

Logo, $c - \varepsilon y \in K_2$ para todo $y \in S(\varphi)$ e para todo $c \in K_1$. Assim, $f(x - \varepsilon y) = 1$, $\forall x \in K_1$ e $\forall y \in S(\varphi)$. Conseqüentemente, se $x \in K_1$,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{S(\varphi)} f(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy = \int_{S(\varphi)} \varphi(y)dy = 1.$$

Acabamos de mostrar que $f_\varepsilon(x) = 1$, $\forall x \in K_1$. Logo, existe uma vizinhança V_K de K na qual $f_\varepsilon = 1$, finalizando a prova. ■

Definição 2.1.8 (***Partição da unidade***). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aberto, e $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de funções teste em Ω. Diremos que esta família é uma partição da unidade se ela satisfizer,*

1) *Para cada $x \in \Omega$ existir uma vizinhança V_x do ponto x que intercepte apenas um número finito dos $S(\varphi_\alpha)$´s;*

2) *Para todo x de Ω, $\sum\limits_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = 1$;*

3) *Para todo x pertencente a Ω, $\varphi_\alpha(x) \geq 0$.*

Observações: $i)$ Resulta das condições 2) e 3) da definição acima que, para cada x pertencente a Ω vale $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$.

$ii)$ A observação $i)$, juntamente com a condição 2) da definição acima, caracterizam o nome partição da unidade.

$iii)$ Dados $c \in \Omega$ e V_c como na condição 1) da definição, vemos que o somatório que aparece na condição 2) contém apenas um número finito de parcelas. Conseqüentemente, podemos sem maiores problemas derivar esta soma para obter, para cada $j = 1, 2, ..., n$, $\sum\limits_{\alpha \in I} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}(c) = 0$ seja qual for $c \in \Omega$.

Definição 2.1.9 (***Partição Subordinada***). *Sejam $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de abertos em $\mathbb{R}^n$ e $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição da unidade. Diremos que esta partição da unidade está subordinada à família de abertos $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ se para cada $\alpha \in I$ existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $S(\varphi_j) \subseteq U_\alpha$.*

Lema 2.1.10. *Sejam $V_1, V_2, ..., V_m$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, K compacto. Então, existem compactos K_i tais que $K_i \subset V_i$ com $1 \leq i \leq m$ e $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$.*

Prova. Para cada $1 \leq i \leq m$ e para todo $n \in I\!N$ construa,

$$V_i^n = \left\{ x \in V_i \; ; \; d\left(x, \partial V_i\right) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Então $\overline{V_i^n} \subset V_i$ e V_i^n aberto para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $n \in I\!N$. Afirmamos que existe $n_0 \in I\!N$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{i-1}^{m} V_i^{n_0}$. Antes de mostrarmos esta afirmação, note que com ela obtemos as conclusões procuradas. Provemos.

De fato, suponha por contradição que isto não ocorra, ou seja, para todo n natural, existe $x_n \in K$ tal que $x_n \notin \bigcup\limits_{i-1}^{m} V_i^n$, definindo assim uma seqüência (x_n) em K. Ora, mas K é compacto, logo a seqüência (x_n) possui uma subseqüência (x_{n_j}) convergente em K. Digamos que $x_{n_j} \longrightarrow \overline{x} \in K$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Desde que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, então $\overline{x} \in V_l$ para algum $1 \leq l \leq m$. Como $x_{n_j} \notin V_i^{n_j}$ seja qual for $1 \leq i \leq m$ então $x_{n_j} \notin V_l^{n_j}$ e, assim, $x_{n_j} \notin V_l$. Conseqüentemente $d(x_{n_j}, \partial V_l) \leq \frac{1}{n_j}$. Portanto $d(\overline{x}, \partial V_l) \leq \frac{1}{n_j}$, $\forall j \in I\!N$. Logo $\overline{x} \in \partial V_l$. Absurdo pois $\overline{x} \in V_l$ e V_l é aberto. ■

Proposição 2.1.11. *Sejam $K \subseteq I\!R^n$, $K \neq \emptyset$ compacto, e $V_1, V_2, ..., V_m$ subconjuntos abertos de $I\!R^n$ satisfazendo $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$. Então, para cada $1 \leq i \leq m$, existe uma função $\varphi_i \in C_0^\infty\left(V_i\right)$ tal que,*

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i\left(x\right) \leq 1$ *para todo* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i\left(x\right) = 1$ *para todo* x *numa vizinhança* V_K *de* K,

3) $0 \leq \varphi_i\left(x\right) \leq 1$ *para todo* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$.

Prova. De acordo com o Lema 2.1.10 tome, para cada $0 \leq i \leq 1$, K_i compacto e tal que $K_i \subset V_i$. Também temos pelo mesmo lema que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$.

Aplicando o Teorema 2.1.7, obtemos funções $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ tais que,

$$\psi_i \in C_0^\infty\left(V_i\right), \, 0 \leq \psi_i\left(x\right) \leq 1 \text{ e } \psi_i = 1 \text{ numa vizinhança } V_{K_i} \text{ de } K_i.$$

Defina então, $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2\left(1 - \psi_1\right)$, $\varphi_3 = \psi_3\left(1 - \psi_1\right)\left(1 - \psi_2\right)$, e de um modo geral,

$$\varphi_i = \psi_i\left(1 - \psi_1\right)\left(1 - \psi_2\right)...(1 - \psi_{i-1}), \, 1 < i \leq m.$$

Como cada $\psi_i \in C_0^\infty$, então temos que $\varphi_i \in C_0^\infty$ para todo $0 \leq i \leq m$. Além disso, obtemos, sem grande dificuldade, o item 3) procurado. Agora, por indução em $l \leq m$, concluímos que,

$$\sum_{i=1}^{l} \varphi_i = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_l).$$

E usando então a versão completa, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_m),$$

obtemos imediatamente o item 1) procurado. Com relação ao item 2), ponha $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{K_i}$. Como $K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{K_i}$ para todo $1 \leq i \leq m$, então $\bigcup_{i=1}^{m} K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{K_i}$ e, portanto, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{K_i} = V$, logo V é vizinhança de K. Assim, se $x \in V$ então $x \in V_{K_i}$ para algum $1 \leq i \leq m$ e, por conseguinte, $\psi_i(x) = 1$. Isto nos leva a

$$(1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_m) = 0$$

e a $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) = 1$. ■

2.2 Distribuições

Esta seção será útil para esclarecer o que está por trás de conceitos como solução fundamental e derivadas fracas, que serão vistos posteriormente.

Definição 2.2.1 (***Convergência em*** $C_0^\infty(\Omega)$). *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ uma seqüência de funções teste em Ω. Diremos que (φ_i) converge a zero (função nula) em $C_0^\infty(\Omega)$ e denotamos $\varphi_i \longrightarrow 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$ se*

1) *Existir um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\varphi_i) \subseteq K$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e*

2) *para cada multi-índice α dado, $(\partial^\alpha \varphi_i)$ convergir uniformemente a zero em K.*

OBSERVAÇÃO: Dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, a seqüência $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergirá para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ se a seqüência $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dada por $\psi_i = \varphi_i - \varphi$ convergir a zero em $C_0^\infty(\Omega)$.

EXEMPLO 2.2.2. *Seja ψ uma função teste fixa. Dada uma seqüência arbitrária $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ que convirja para zero, temos que a seqüência definida por $\varphi_i = a_i\psi$ para todo i natural, converge para zero em $C_0^\infty(\Omega)$.*

DEFINIÇÃO 2.2.3 (***Distribuição***). *Um funcional $u : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear e contínuo é chamado de distribuição. O conjunto das distribuições em $C_0^\infty(\Omega)$ será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, o valor da distribuição u na função teste φ será denotado por $< u, \varphi >$.*

OBSERVAÇÃO: Um resultado de análise funcional nos diz que um funcional linear é contínuo se, e somente se, for contínuo em um ponto x_0 (qualquer) de seu domínio. Assim, o funcional linear $u : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ será contínuo se, e somente se, para toda seqüência $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergindo a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ tivermos $u(\varphi_i) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

EXEMPLO 2.2.4. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_f : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por*

$$< T_f, \psi >= \int_\Omega f(x)\psi(x)dx,\ \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

é uma distribuição. Mostremos este fato.

Solução. (**Parte 1: T_f está bem definido**). Dada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que existe $M > 0$ tal que $|\psi(x)| \le M$, assim,

$$\left| \int_\Omega f(x)\psi(x)dx \right| \le \int_{S(\psi)} |f(x)|\,|\psi(x)|\,dx \le M \int_{S(\psi)} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Logo $< T_f, \varphi >$ é de fato um número complexo.

(**Parte 2: T_f é linear**) A linearidade de T_f decorre imediatamente da linearidade da integral.

(**Parte 3: T_f é contínuo**) Seja $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_i \longrightarrow 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. De acordo com o inciso 1) da Definição 2.2.1 existe K compacto tal que

$S(\varphi_i) \subseteq K$ para todo $i \in I\!N$. Assim,

$$|< T_f, \varphi_i >| \leq \int_K |f(x)|\,|\varphi_i(x)|\,dx,\ \forall i \in I\!N.$$

Suponha inicialmente que $P = \int_K |f(x)|\,dx > 0$. Tome $\alpha_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ o multi-índice nulo e $\varepsilon > 0$. Usando agora o inciso 2) da Definição 2.2.1, temos que existe $i_0 \in I\!N$ tal que se $i > i_0$ então $|\varphi_i(x)| = |\partial^{\alpha_0}\varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{P}$ para todo $x \in K$. Logo, para $i > i_0$,

$$|< T_f, \varphi_i >| \leq \int_K |f(x)|\,|\varphi_i(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{P}\int_K |f(x)|\,dx = \varepsilon,$$

como procurávamos. O caso $\int_K |f(x)|\,dx = 0$ é trivial. ∎

Observações: $i)$ Note que no exemplo acima poderíamos tomar $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$ pois, como já vimos $L^p_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$.

$ii)$ Quando não houver risco de confusão, denotaremos a distribuição T_f simplesmente por f, isto é, $< T_f, \varphi >=< f, \varphi >$.

Exemplo 2.2.5. *Dados $\Omega \subset I\!R^n$, Ω aberto, e $a \in \Omega$, defina $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$. Então δ_a é uma distribuição e é conhecida como distribuição de Dirac (centrada em a, neste caso). Deixamos a cargo do leitor verificar esta afirmação.*

Proposição 2.2.6. *Sejam $f,\ g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $< f, \psi >=< g, \psi >$ para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $f = g$ q.t.p.*

Prova. Sejam $K \subset \Omega$, $K \neq \emptyset$ compacto, e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi = 1$ numa vizinhança V_k de K. Estendendo f, g e φ por zero fora de Ω, defina $h = f - g$. Então $\varphi h \in L^1(I\!R^n)$. Agora, para cada $\varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty$, faça $\psi_\varepsilon(z) = \psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ e

$$\begin{aligned}
(\varphi h)_\varepsilon(x) &= \int_{I\!R^n} (\varphi h)(x - \varepsilon y)\,\psi(y)\,dy = \varepsilon^{-n}\int_{I\!R^n} (\varphi h)(y)\,\psi_\varepsilon(x - y)\,dy \\
&= \varepsilon^{-n}\left\{\int_{I\!R^n} f(y)[\varphi(y)\,\psi_\varepsilon(x - y)]dy - \int_{I\!R^n} g(y)[\varphi(y)\,\psi_\varepsilon(x - y)]dy\right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\gamma_x(y) = \varphi(y)\,\psi_\varepsilon(x - y) \in C_0^\infty$ temos que a última expressão da igualdade acima fica

$$\varepsilon^{-n}\left(< T_f, \gamma_x > - < T_g, \gamma_x >\right),$$

que vale zero por hipótese. Pela arbitrariedade da ψ tomada, concluímos então que

$$(\varphi h)_{\varepsilon}(x) = 0,\ \forall x \in I\!R^n \text{ e } \forall \psi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Como $(\varphi h)_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e por teorema $(\varphi h)_{\varepsilon} \longrightarrow \varphi h$ em L^1, então $\varphi h = 0$ $q.t.p.$ de Ω. Em particular, $f = g$ $q.t.p.$ de K. Tomando uma seqüência de compactos K_n tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$, concluímos que $f = g$ $q.t.p.$ de Ω. ■

Dados u e $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos a distribuição $u+v$ de um modo natural através de

$$< u+v, \varphi > \;=\; < u, \varphi > + < v, \varphi >,\ \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Definição 2.2.7 (***Operadores Adjuntos***). *Sejam $L, L' : C_0^{\infty}(\Omega) \longrightarrow C_0^{\infty}(\Omega)$ operadores lineares e contínuos. Diremos que L é operador adjunto de L', e vice-versa, se*

$$\int_{\Omega} (L\varphi)(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{\Omega} \varphi(x)\,(L'\psi)(x)\,dx,\ \forall \varphi, \psi \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{2.2}$$

Denotaremos, neste caso, $< L\varphi, \psi > = < \varphi, L'\psi >$, $\forall \varphi, \psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Observações: $i)$ O operador linear L será contínuo em $C_0^{\infty}(\Omega)$ se $L(\psi_j) \longrightarrow 0$ em $C_0^{\infty}(\Omega)$ sempre que a seqüência de funções teste (ψ_j) convergir a zero em $C_0^{\infty}(\Omega)$.

$ii)$ Seja $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Temos, sem grande dificuldade, que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e portanto, como já vimos, f define uma distribuição T_f que denotamos simplesmente f. Abusamos da notação escrevendo $C_0^{\infty}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposição 2.2.8. *Sejam L,L' : $C_0^{\infty}(\Omega) \longrightarrow C_0^{\infty}(\Omega)$ operadores adjuntos. Então, existe $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ linear de modo que $\tilde{L} = L$ em $C_0^{\infty}(\Omega)$ (no sentido de que dada $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, os números complexos $< \tilde{L}T_{\varphi}, \psi >$ e $< L\varphi, \psi >$ são iguais $\forall \psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$).*

Prova. Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição e o funcional $\tilde{L}u : C_0^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$< \tilde{L}u, \psi > = < u, L'\psi >,\ \forall \psi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Afirmamos que $\tilde{L}u$ é uma distribuição. Vejamos.

Naturalmente $\tilde{L}u$ está bem definido e é linear. Além disso, $\tilde{L}u$ é contínuo pois dada $(\psi_i)_{i\in I\!N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_i \longrightarrow 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$ temos, pelo fato de L' ser contínuo, que $L'(\psi_i) \longrightarrow 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Assim, usando a continuidade da u, temos

$$< \tilde{L}u, \psi_i > \; = \; < u, L'\psi_i > \; \longrightarrow \; < u, 0 > \; = 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

Note que definimos pontualmente um operador linear $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Resta-nos mostrar que $\tilde{L} = L$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer, porém fixa. Como L e L' são adjuntos, então dada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} < L\varphi, \psi > &= \int_\Omega (L\varphi)(x)\,\psi(x)\,dx = \int_\Omega \varphi(x)\,(L'\psi)(x)\,dx \\ &= \; < T_\varphi, L'\psi > \; = \; < \tilde{L}u, \psi > . \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade da φ e da ψ escolhidas, temos que $\tilde{L} = L$ em $C_0^\infty(\Omega)$. ■

DEFINIÇÃO 2.2.9 (***Operação produto por função***). *Dada $f \in C^\infty(\Omega)$, defina o operador $L : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega)$ através de $L\varphi = f\varphi$. L é um operador linear contínuo e $L' = L$. Seja, agora, uma distribuição u qualquer. Definimos a distribuição fu pondo,*

$$< fu, \varphi > \; = \; < u, f\varphi >, \; \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

EXEMPLO 2.2.10. *Tome uma $f \in C^\infty(\Omega)$ qualquer e a distribuição Delta de Dirac centrada em $a \in \Omega$. Temos aqui um caso interessante pois dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} < f\delta_a, \varphi > &= \; < \delta_a, f\varphi > \; = \; < f(a)\,\delta_a, \varphi > \\ &= f(a)\,\varphi(a) = f(a) < \delta_a, \varphi >, \end{aligned}$$

Para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 2.2.11 (***Operação derivação***). *Sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Estendendo-as por zero em $I\!R^n \backslash \Omega$ e fazendo integração por partes obtemos, para $1 \le i \le n$,*

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi dx = -\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx.$$

Seja $L : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega)$ *o operador linear contínuo dado por* $L\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. *Desta forma* $L' : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega)$ *definido por* $L'\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ *é adjunto de* L. *Por esta razão, define-se*

$$< \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi > \quad = - < u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > , \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \ e \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Em particular, se $1 \leq i, j \leq n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ *pois calculamos estas expressões baseados em funções* φ *de classe* $C_0^\infty(\Omega)$. *Além disso, através de indução em* $|\alpha|$ (α=$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *multi-índice) obtemos,*

$$< \partial^\alpha u, \varphi > \quad = (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi > , \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \ e \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo 2.2.12. *Tome a função de Heaviside deslocada de* $a \in I\!R$, *isto é,*

$$H_a(x) = \begin{cases} 1, \ \ para \ x > a \ \ e \\ \\ 0, \ \ se \ x < a. \end{cases}$$

H_a *está em* L^1_{loc} *e, portanto, define uma distribuição. Dada uma* $\varphi \in C_0^\infty$ *arbitrária, temos então que*

$$\begin{aligned} < H_a', \varphi > \quad &= \quad - < H_a, \frac{d\varphi}{dx} >= - \int_{-\infty}^{+\infty} H_a(x)\,\varphi'(x)\,dx \\ &= \quad - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \\ &= \quad \varphi(a) = \quad < \delta_a, \varphi > . \end{aligned}$$

Ou resumidamente, $\frac{dH_a}{dx} = \delta_a$.

Exemplo 2.2.13 (***Distribuição*** *v.p.*$\frac{1}{x}$). *A função* $ln\,|x|$ *pertence a* L^1_{loc} *(deriva-se isto do fato de* $\lim_{x\to 0} |x|^{1/2}\, ln\,|x| = 0$). *No entanto,* $\dfrac{d}{dx}(ln\ |x|) = \dfrac{1}{x}$ *para todo* $x \neq 0$ *e* $\dfrac{1}{x}$ *não é localmente integrável em nenhuma vizinhança de zero. Procuremos então pela derivada da distribuição gerada por* $ln\,|x|$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty$ *qualquer. Escolhendo* $m > 0$ *de modo que* $S(\varphi) \subset [-m, m]$ *e usando integração por partes,*

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{+\infty} ln\ |x|\,\varphi'(x)\,dx \quad &= \quad - \left[\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-m}^{-\varepsilon} ln\ |x|\,\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+m} ln\ |x|\,\varphi'(x)\,dx \right] \\ &= \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\, ln\,\varepsilon + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio temos que $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(c)$ *para algum* $c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Além disso,* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$. *E por estas razões definimos,*

$$< v.p.\frac{1}{x}, \varphi > \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \;,\; \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Restando (para o leitor) verificar que $v.p.\frac{1}{x}$ *é, de fato, uma distribuição.*

Afirmação: Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, para j em $\{1, 2, \ldots, n\}$, vale a fórmula

$$\frac{\partial (fu)}{\partial x_j} = u\frac{\partial f}{\partial x_j} + f\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Prova. De fato, tome $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrária. Daí,

$$\frac{\partial (fu)}{\partial x_j}(\psi) = - < fu, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} >= - < u, f\frac{\partial \psi}{\partial x_j} > . \tag{2.3}$$

Por outro lado, $\frac{\partial(f\psi)}{\partial x_j} = f\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \psi\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e, portanto, $f\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{\partial(f\psi)}{\partial x_j} - \psi\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Aplicando u a esta última igualdade obtemos,

$$u\left(f\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = u\left(\frac{\partial (f\psi)}{\partial x_j} - \psi\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = u\left(\frac{\partial (f\psi)}{\partial x_j}\right) - u\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Substituindo-se agora em (2.3) chegamos à fórmula afirmada. ∎

Definição 2.2.14. *Duas distribuições* $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *serão ditas iguais em um aberto* $U \subseteq \Omega$ *se satisfizerem* $< u, \psi >=< v, \psi >$ *para toda* $\psi \in C_0^\infty(U)$.

Teorema 2.2.15 *Sejam* $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Suponha que para todo ponto* $c \in \Omega$ *exista um aberto* U_c *contendo* c *tal que,*

$$< u, \psi > \;=\; < v, \psi >, \; \forall \psi \in C_0^\infty(U_c).$$

Então, $u = v$ *(em* Ω*).*

Prova. Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrária, porém fixa. Estamos querendo mostrar que $< u, \psi >=< v, \psi >$. Chamemos $K = S(\psi)$. Para cada ponto $c \in K$ tome a vizinhança aberta U_c garantida pela hipótese. Temos então uma cobertura $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ de K onde cada $V_\alpha = U_c$ para algum $c \in K$, Além de garantirmos que

$< u,\psi >=< v,\psi >$, $\forall \psi \in C_0^\infty(V_\alpha)$ e $\forall \alpha \in I$. Como K é compacto, existe uma quantidade finita dos V_α que também cobrem K, isto é, $V_1, V_2, \ldots, V_n$ tais que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$. Além disso, vale reforçar que temos

$$< u,\psi > \;=\; < v,\psi >,\ \forall \psi \in C_0^\infty(V_i) \text{ e } \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Usando agora a Proposição 2.1.11 tome, para cada $1 \le i \le n$, $\varphi_i \in C_0^\infty(V_i)$ satisfazendo $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$ para todo x numa vizinhança V_K de K. Nestas condições podemos escrever $\psi \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \psi\varphi_i$ em V_K. No entanto, sendo K o suporte de ψ segue que $\psi \equiv 0$ em $\Omega \backslash K$. Logo,

$$\psi \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi\varphi_i \text{ em } \Omega.$$

Assim, como $\psi\varphi_i \in C_0^\infty(V_i)$, $\forall i$ satisfazendo $1 \le i \le n$, temos,

$$\begin{aligned} < u,\psi > &= < u, \sum_{i=1}^{n} \psi\varphi_i > = \sum_{i=1}^{n} < u, \psi\varphi_i > = \sum_{i=1}^{n} < v, \psi\varphi_i > \\ &= < v, \sum_{i=1}^{n} \psi\varphi_i > = < v,\psi >, \end{aligned}$$

como procurávamos. ■

Definição 2.2.16 (***Suporte de Distribuição***). *Definimos o suporte da distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (denotado por $S(u)$) como o complemento em Ω do maior conjunto aberto A no qual $< u,\psi >= 0$ $(\psi \in C_0^\infty(U), U \subset A)$. Numa linguagem mais concisa escrevemos, se*

$$A = \{x \in \Omega \ ; \exists V_x \text{ na qual } < u,\psi >= 0,\ \forall \psi \in C_0^\infty(V_x)\},\ \text{então } S(u) = \overline{\Omega \backslash A},$$

onde V_x é uma vizinhança de x.

Afirmação: Dada uma função f contínua no aberto Ω temos, sem grandes dificuldades, que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Prove que os suportes de f como função e como distribuição são iguais.

Prova. De fato, sejam $S_F(f)$ e $S_D(f)$ os suportes de f como função e como distribuição, respectivamente. Queremos mostrar duas inclusões, a saber, (1) $S_F(f) \subseteq S_D(f)$ e (2) $S_D(f) \subseteq S_F(f)$. Comecemos por (1).

Seja $c \notin S_D(f)$. Logo existe V_c tal que $< f, \varphi >= 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(V_c)$. Afirmamos que $f \equiv 0$ em V_c, o que caracteriza $c \notin S_F(f)$. Mostremos então que $f \equiv 0$ em V_c. Suponha, por absurdo, que $f \not\equiv 0$ em V_c. Portanto existe $\tilde{x} \in V_c$ tal que $f(\tilde{x}) \neq 0$. Digamos que $f(\tilde{x}) > 0$ (ver observações logo abaixo). Como f é contínua, então pelo Teorema da Conservação do Sinal temos que existe uma vizinhança $V_{\tilde{x}}$ na qual $f(x) > 0$.

Tome agora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ valendo um em $\overline{V_{\tilde{x}}}$, com $\varphi \geq 0$ em Ω (Teorema 2.1.7). Logo,

$$0 = \ < f, \varphi > \ = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \geq \int_{V_{\tilde{x}}} f(x).1dx > 0,$$

sendo a última desigualdade devida ao fato do integrando ser positivo. Absurdo!

Vejamos agora (2). Suponha que $c \notin S_F(f)$. Queremos mostrar que $c \notin S_D(f)$, isto é, que existe uma vizinhança V_c de c na qual $< f, \varphi >= 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_c)$. Como $c \notin S_F(f)$, então $c \in (\Omega \backslash S_F(f))$ que é aberto. Logo, existe V_c contida em $(\Omega \backslash S_F(f))$ e $f \equiv 0$ nesta vizinhança. Deste modo,

$$< f, \varphi > \ = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(V_c),$$

terminando a prova. ∎

Observações: $i)$ O caso $f(\tilde{x}) < 0$ é análogo.

$ii)$ Na prova da afirmação acima supomos f uma função real, o caso onde f é uma função complexa pode ser tratado de modo semelhante ao caso real, bastando para isso trabalhar separadamente com as partes real e imaginária de f.

Exemplo 2.2.17. *O suporte da função de Heaviside é o intervalo fechado* $[a, +\infty)$.

Solução. Novamente temos que mostrar duas inclusões. Mostremos inicialmente que $S(H_a) \subseteq [a, +\infty)$.

Seja $c \notin [a, +\infty)$. Naturalmente temos então que $c \in (-\infty, a)$. Considere $\psi \in C_0^\infty((-\infty, a))$, assim,

$$< H_a, \psi > = \int_{-\infty}^{+\infty} H_a(x)\psi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} 0dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} 1.\psi(x)dx \right) = 0,$$

pois ψ tem suporte em $(-\infty, a)$. Isto mostra que $c \notin S\left(H_a\right)$. A inclusão restante fica a cargo do leitor. Sugestão: Tome $c \in [a, +\infty)$ e procure usar alguma função $\psi \in C_0^\infty\left(V_c\right)$ de modo a tornar $H_a\left(\psi\right) > 0$. ■

Exemplo 2.2.18. *$S(\delta_a) = \{a\}$. Fica a cargo do leitor verificar este fato.*

Exemplo 2.2.19. *Dada $f \in L^1\left(\Omega\right)$ tal que $f = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado $F \subset \Omega$, então f define uma distribuição e $S(f) \subset F$.*

Solução. Seja $c \notin F$. Como F é fechado, existe um aberto V_c tal que $V_c \subset \Omega \backslash F$. Seja φ em $C_0^\infty\left(V_c\right)$. Desde que $f = 0$ $q.t.p.$ em $\Omega \backslash F$, $f\varphi = 0$ $q.t.p.$ Logo,

$$< f, \varphi > \;=\int_\Omega f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx = 0.$$

Portanto, $< f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty\left(V_c\right)$, mostrando que $c \notin S\left(f\right)$ ■

Teorema 2.2.20. *Sejam $u, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas satisfazendo,*

$$< \frac{\partial T_u}{\partial x_j}, \varphi > \;=\; < f, \varphi >,\ \forall \varphi \in C_0^\infty\left(\Omega\right).$$

Então u possui derivada clássica $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$.

Prova. Suponha inicialmente que $S(u)$ seja compacto. Como u é contínua, então $S(u) = S(T_u)$. Além disso, $S\left(\frac{\partial T_u}{\partial x_j}\right) \subset S(u)$, pois se $c \notin S(u)$, então existe V_c na qual $< T_u, \varphi >= 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty\left(V_c\right)$. No entanto, quando $\varphi \in C_0^\infty\left(V_c\right)$ então $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in C_0^\infty\left(V_c\right)$. Logo $0 =< T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >= - < \frac{\partial T_u}{\partial x_j}, \varphi >$ e isto nos diz, pela arbitrariedade da φ, que $c \notin S(\frac{\partial T_u}{\partial x_j})$.

Voltando ao problema central, temos que por hipótese $\frac{\partial T_u}{\partial x_j} = f$. Conseqüentemente $S(f) = S\left(\frac{\partial T_u}{\partial x_j}\right)$ é compacto também. Estenda f e u por zero em $I\!R^n \backslash \Omega$ e tome $\varphi \in C_0^\infty$ como no Exemplo 2.1.2. Em seguida, considere, para cada $\varepsilon > 0$, a função regularizante de u, isto é,

$$u_\varepsilon\left(x\right) = \int_{S(\varphi)} u(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy = \varepsilon^{-n}\int_{\hat{S}(\varphi)} u(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) &= \varepsilon^{-n}\int_{\hat{S}(\varphi)} u(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})\right)dy \\
&= -\varepsilon^{-n}\int_{\hat{S}(\varphi)} u(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})\right)dy \\
&= \varepsilon^{-n} < \frac{\partial T_u}{\partial x_j}, \varphi(\frac{x-y}{\varepsilon}) > \quad = \varepsilon^{-n} < T_f, \varphi(\frac{x-y}{\varepsilon}) > \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\hat{S}(\varphi)} f(y)\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy = \int_{S(\varphi)} f(x-\varepsilon y)\varphi(y)dy = f_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Como f é contínua e possui suporte compacto, então $f_\varepsilon \longrightarrow f$ uniformemente em qualquer compacto. Pelo mesmo motivo, também temos que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ uniformemente em qualquer compacto. Assim $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \longrightarrow g = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, isto é, u possui derivada clássica. E mais, de $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = f_\varepsilon \stackrel{u}{\longrightarrow} f$, logo, por unicidade do limite, $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$, como queríamos.

Para o caso onde $S(u)$ não é compacto tentaremos ajustar condições para podermos usar o que foi provado acima.

Dado $c \in \Omega$, tome $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança V_c do ponto c. Como sabemos, ψT_u define uma distribuição. Logo,

$$\frac{\partial(\psi T_u)}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}T_u + \psi\frac{\partial T_u}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}T_u + \psi T_f.$$

Chamando então, $\tilde{u} = \psi u$ e $\tilde{f} = \psi f + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}u$ temos que $\tilde{u}$ e $\tilde{f}$ são contínuas e possuem suportes compactos (pois ψ possui). Note então que reunimos todas as condições estabelecidas anteriomente para $\tilde{u}$ em vez de u e $\tilde{f}$ no lugar de f. Assim, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = \tilde{f}$ e portanto,

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_j} = \psi f + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}u.$$

Mas, em V_c temos que $\psi \equiv 1$ e, portanto, $\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \equiv 0$. Logo a igualdade acima reduz-se a

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f,$$

como procurávamos. ∎

Definição 2.2.21 (***Distribuição de Classe*** C^∞). *Dados $U \subseteq \Omega$ um aberto. Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ será dita ser de classe $C^\infty(U)$ se existir uma função*

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo,

$$f \in C^{\infty}(U) \;\; e \;\; < u, \psi > \;\; = \int_{\Omega} f(x)\psi(x)\,dx, \;\; \forall \psi \in C_0^{\infty}(U).$$

Denotamos, neste caso, $u \in C^{\infty}(U)$.

Definição 2.2.22 (***Suporte Singular de Distribuição***). *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Considere também o conjunto*

$$A_s = \{x \in \Omega \;;\; \exists V_x \text{ na qual } u \in C^{\infty}(V_x)\}.$$

Definimos o suporte singular da distribuição u por,

$$SS(u) = \overline{\Omega \backslash A_s}.$$

Observações: $i)$ O suporte singular da função de Heaviside deslocada de a é constituído apenas do ponto a.

$ii)$ De um modo geral, conhecida a distribuição u temos que $SS(u) \subset S(u)$.

Definição 2.2.23 (***O espaço*** $\mathcal{E}'(\Omega)$). *O conjunto das distribuições que possuem suporte compacto será denotado por $\mathcal{E}'(\Omega)$, ou seja,*

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \;;\; S(u) \text{ é compacto}\}.$$

Teorema 2.2.24. *Seja u uma distribuição de $\mathcal{E}'(\Omega)$. Então existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz,*

1) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi), \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *e*

2) $\tilde{u}(\psi) = 0$ *se* $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ *for tal que* $S(\psi) \cap S(u) = \emptyset$.

Prova. Unicidade: Sejam $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 : C^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineares e satisfazendo as condições 1) e 2) enunciadas acima. Tome $f \in C^{\infty}(\Omega)$ arbitrária. Queremos mostrar que $\tilde{u}_1(f) = \tilde{u}_2(f)$.

Como $S(u)$ é compacto, tome $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança $V \subset \Omega$ de $S(u)$ e escreva,

$$f = \psi f + (1 - \psi) f.$$

Chamando $f_0 = \psi f$ e $f_1 = (1-\psi)f$, temos que $f_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ e $f_1 \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$ (pois se $x \in S(u)$ então $\psi(x) = 1$ e portanto $f_1(x) = 0$, daí temos que existe uma vizinhança de x na qual $f_1 \equiv 0$. Deste modo $x \notin S(f)$). Assim, usando as condições 1) e 2) do enunciado do teorema,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(f) &= \tilde{u}_1(f_0 + f_1) = \tilde{u}_1(f_0) + \tilde{u}_1(f_1) = \tilde{u}_1(f_0) + 0 \\ &= u(f_0) = \tilde{u}_2(f_0) + 0 = \tilde{u}_2(f). \end{aligned}$$

Existência: Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ uma função qualquer. Decomponha a função f por $f = f_0 + f_1$ onde $f_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ e $f_1 \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$. Agora, defina $\tilde{u} : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\tilde{u}(f) = u(f_0)$. Naturalmente $\tilde{u}$ é linear pois u é. Falta-nos então verificarmos que $\tilde{u}$ está bem definido e que satisfaz as condições 1) e 2) enunciadas.

$\tilde{u}$ está bem definida: Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ arbitrária. Tome duas decomposições de f, isto é, $f_0, \tilde{f}_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ e $f_1, \tilde{f}_1 \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo $S(f_1) \cap S(u) = \emptyset$, $S(\tilde{f}_1) \cap S(u) = \emptyset$ e,

$$f = f_0 + f_1 = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1.$$

Sem grande dificuldade podemos concluir que $S(\tilde{f}_1 - f_1) \subseteq S(\tilde{f}_1) \cup S(f_1)$ e como

$$(S(\tilde{f}_1) \cup S(f_1)) \cap S(u) = (S(\tilde{f}_1) \cap S(u)) \cup (S(f_1) \cap S(u)) = \emptyset,$$

então $S(\tilde{f}_1 - f_1) \cap S(u) = \emptyset$. Note que $f_0 - \tilde{f}_0 = \tilde{f}_1 - f_1$ e, portanto,

$$S(f_0 - \tilde{f}_0) \cap S(u) = \emptyset.$$

Além disso, $\left(f_0 - \tilde{f}_0\right) \in C^\infty(\Omega)$. Logo, pelo item 2), temos $\tilde{u}(f_0 - \tilde{f}_0) = 0$ e isto nos dá,

$$\tilde{u}(f_0) = \tilde{u}(\tilde{f}_0)$$

mostrando que $\tilde{u}(f)$ não depende da escolha da decomposição.

$\tilde{u}$ satisfaz 1): Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer. Decompondo φ por $\varphi = \varphi + 0$ temos que $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$, satisfazendo assim o item 1).

$\tilde{u}$ satisfaz 2): Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $S(\psi) \cap S(u) = \emptyset$. Neste caso, decompondo ψ por $\psi = 0 + \psi$, obtemos que $\tilde{u}(\psi) = 0$. ■

Teorema 2.2.25. *Sejam $\Omega \subset I\!R^n$, Ω aberto, e u algum funcional linear em $C_0^\infty(\Omega)$. Então u será contínuo se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$ existirem constantes $C_K > 0$ e $N_K \in I\!N \cup \{0\}$ satisfazendo*

$$|u(\psi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq N_K} sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|, \ \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{com } S(\psi) \subseteq K. \qquad (2.4)$$

Prova. Suponha que a relação (2.4) seja válida e considere uma seqüência $(\varphi_i)_{i \in I\!N}$ contida em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_i \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Assim, de acordo com a Definição 2.2.1, existe um compacto $K_0 \subset \Omega$ satisfazendo $S(\varphi_i) \subseteq K_0$, $\forall i$ natural, e também que $\partial^\alpha \varphi_i \to 0$ uniformemente em K_0, $\forall \alpha$ multi-índice. Donde, tomando $\varepsilon > 0$, $C_{K_0} > 0$ e $N_{K_0} \in I\!N \cup \{0\}$ as constantes que satisfazem (2.4) para K_0, temos que existe i_0 natural tal que se $i > i_0$ então $sup_{x \in K_0} |\partial^\alpha \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{C_{K_0}.M}$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq N_{K_0}$ e onde $M = \sum_{|\alpha| \leq N_{K_0}} 1$

Deste modo, levando φ_i em (2.4) e pegando $i > i_0$,

$$|u(\varphi_i)| \leq C_{K_0} \sum_{|\alpha| \leq N_{K_0}} sup_{x \in K_0} |\partial^\alpha \varphi_i(x)| < C_{K_0} M \frac{\varepsilon}{C_{K_0}.M} = \varepsilon,$$

mostrando, com isso, que $u(\varphi_i) \longrightarrow 0$ quando $i \longrightarrow \infty$.

Agora, para a outra implicação, tome u contínua e suponha por absurdo que a relação (2.4) seja falsa. Logo existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que para qualquer escolha de $C_K > 0$ e de $N_K \in I\!N \cup \{0\}$ existe uma função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo,

$$S(\psi) \subseteq K \ \text{ e } \ |u(\psi)| > C_K \sum_{|\alpha| \leq N_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Tomando então $C_K = N_K = 1$ obtemos uma função $\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$S(\psi_1) \subseteq K \ \text{ e } \ |u(\psi_1)| > 1 \sum_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi_1(x)|.$$

Agora, escolhendo $C_K = N_K = 2$ obtemos ψ_2 satisfazendo

$$S(\psi_2) \subseteq K \ \text{ e } \ |u(\psi_2)| > 2 \sum_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi_2(x)|.$$

E assim sucessivamente para todo número natural. Construímos então uma seqüência $(\psi_i)_{i\in I\!N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que para cada i,

$$S(\psi_i) \subseteq K \text{ e } |u(\psi_i)| > i \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi_i(x)|. \tag{2.5}$$

Como esta última desigualdade é homogênea em ψ_i então podemos supor que $|u(\psi_i)| = 1$, $\forall i \in I\!N$ (ver observação abaixo). Logo $u(\psi_i) \not\to 0$ quando $i \to \infty$. No entanto, de (2.5) obtemos, sem a menor dificuldade, que $\psi_i \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$, produzindo assim um absurdo, visto que u é contínua. ■

Observação: Quando dizemos que a desigualdade (2.5) é homogênea em ψ_i, queremos dizer que se pegarmos constantes $\beta_i \in \mathbb{C}$ (i percorrendo $I\!N$ e $\beta_i \neq 0$) e gerarmos a seqüência (φ_i) onde $\varphi_i = \beta_i\psi_i$ para todo $i \in I\!N$, então, pela linearidade da u e de suas derivadas, obtemos

$$|u(\varphi_i)| > i \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi_i(x)|,$$

o que implica

$$|u(\psi_i)| > i \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \psi_i(x)|.$$

Daí, segue que se fizermos $\beta_i = \frac{1}{u(\psi_i)}$ para todo i, encontramos,

$$1 > i \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^\alpha \varphi_i(x)|.$$

A rigor, deveríamos ter trocado, na prova acima, ψ_i por $\varphi_i = \frac{1}{u(\psi_i)}\psi_i$ logo após termos suposto $|u(\varphi_i)| = 1$. No entanto, abusamos da notação e mantemos ψ_i mesmo.

Definição 2.2.26 (***Convergência em*** $C^\infty(\Omega)$). *Seja* $\Omega \subset I\!R^n$, Ω *aberto. Diremos que a seqüência* $(\varphi_i)_{i\in I\!N} \subset C^\infty(\Omega)$ *converge para zero em* $C^\infty(\Omega)$ *(e denotamos* $\varphi_i \longrightarrow 0$ *em* $C^\infty(\Omega)$*) se ela satisfizer* $\forall K \subset \Omega$, K *compacto, e* $\forall n \in I\!N \cup \{0\}$ *as derivadas de ordem* n *de* φ_i *convergem uniformemente a zero em* K.

Observação: O leitor pode verificar que convergência a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ implica em convergência a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Definição 2.2.27 (***Distribuição em*** $C^{\infty}(\Omega)$). *Um funcional linear u, indo de $C^{\infty}(\Omega)$ em $\mathbb{C}$, será dito ser uma distribuição em $C^{\infty}(\Omega)$ se for contínuo (equivalentemente, $u(\varphi_i) \to 0 \in \mathbb{C}$ sempre que $\varphi_i \to 0 \in C^{\infty}(\Omega)$).*

Teorema 2.2.28. *Seja $u : C^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Então u será contínuo se, e somente se, existirem um compacto $K \subset \Omega$ e constantes $C > 0$ e $m \in I\!N \cup \{0\}$ satisfazendo*

$$|u(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha} \psi(x)|, \ \forall \psi \in C^{\infty}(\Omega). \tag{2.6}$$

Prova. Suponha que (2.6) seja verdadeira. Tome agora $(\varphi_i)_{i \in I\!N} \subset C^{\infty}(\Omega)$ convergindo a zero em $C^{\infty}(\Omega)$. Logo todas a derivadas de ordem n de φ_i convergem uniformemente a zero em K. Daí concluímos que $C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha} \varphi_i(x)| \longrightarrow 0$ quando $i \to \infty$. Assim, por (2.6) temos que,

$$|u(\varphi_i)| \to 0 \in \mathbb{C}, \text{ quando } i \to \infty.$$

Pela arbitrariedade da seqüência (φ_i) segue a continuidade da u.

Seja u contínua e suponha, por absurdo, que (2.6) não se verifique, isto é, $\forall K \subset \Omega$, K compacto, $\forall C > 0$ e $\forall m \in I\!N \cup \{0\}$ exista uma função $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ satisfazendo

$$|u(\psi)| > C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha} \psi(x)|.$$

Pegando então uma seqüência de compactos $(K_i) \subset \Omega$ tais que $K_i \subset K_{i+1}$, $\forall i \in I\!N$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$, determinamos uma seqüência $(\varphi_i) \subset C^{\infty}(\Omega)$ que possui a propriedade de

$$|u(\varphi_i)| > i \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |\partial^{\alpha} \varphi_i(x)|, \ \forall i \in I\!N.$$

Levando em conta que a desigualdade acima é homogênea em φ_i, então podemos supor que $|u(\varphi_i)| = 1$ para todo i. Assim,

$$\sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |\partial^{\alpha} \varphi_i(x)| < \frac{1}{i}, \ \forall i \in I\!N.$$

E com base nesta desigualdade temos que a seqüência (φ_i) construída acima converge para zero em $C^\infty(\Omega)$, pois dados $K \subset \Omega$ um compacto qualquer, n_0 um número em $I\!N \cup \{0\}$ e $\varepsilon > 0$, tome $i_0 \in I\!N$ tal que $n_0 \leq i_0$, $\frac{1}{i_0} < \varepsilon$ e $K \subseteq K_{i_0}$ (i_0 existe pois $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$). Agora, para $i > i_0$ e para $|\alpha_0| = n_0$ multi-índice,

$$\sup_{x\in K} |\partial^{\alpha_0}\varphi_i(x)| \leq \sum_{|\alpha_0|=n_0} \sup_{x\in K} |\partial^{\alpha_0}\varphi_i(x)| \leq \sum_{|\alpha|\leq i} \sup_{x\in K_i} |\partial^{\alpha}\varphi_i(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon,$$

e, portanto, $\partial^{\alpha_0}\varphi_i \longrightarrow 0$ uniformemente em K.

Concluímos então que $u(\varphi_i) \longrightarrow 0$ pelo fato de u ser contínua e $\varphi_i \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$. No entanto, $|u(\varphi_i)| = 1$, $\forall i \in I\!N$. Absurdo. ■

2.3 Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Continuando com o estudo das distribuições, introduziremos importantes conceitos de convergência com exemplos e resultados relacionados.

Definição 2.3.1 (***Convergência em*** $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Seja* $(u_n)_{n\in I\!N}$ *uma seqüência de distribuições em* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Diremos que esta seqüência converge para a distribuição* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *se ocorrer*

$$\lim_{n\to\infty} < u_n, \varphi > \;=\; < u, \varphi >, \; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Exemplo 2.3.2. *Seja* $\varphi \in C_0^\infty$ *tal que* $S(\varphi) \subseteq \overline{B(0,1)}$, $0 \leq \varphi$ *e, além disso,* $\int_{I\!R^n} \varphi(x)\,dx = 1$. *Então, dado* $a \in I\!R^n$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{a-x}{\varepsilon}\right)$ *converge para* δ_a.

Solução. De fato, tomemos $\psi \in C_0^\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} < \varphi_\varepsilon, \psi > &= \varepsilon^{-n}\int_{I\!R^n} \psi(x)\,\varphi\left(\frac{a-x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{I\!R^n} \psi(a-\varepsilon x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \psi_\varepsilon(a) \to \psi(a) = \;< \delta_a, \psi >, \end{aligned}$$

como procurávamos. ■

Proposição 2.3.3. $\mathcal{E}'(\Omega)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Prova. Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tomemos $(K_n)_{n\in I\!N}$ uma seqüência de compactos de modo que $K_n \subset K_{n+1}$ e que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. De posse desta seqüência de compactos, tome uma seqüência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \equiv 1$ numa vizinhança V_{K_n} de K_n, para todo n. Defina então $u_n = \varphi_n u$. Então $u_n \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\forall n$ (pois $S(u_n) \subset S(\varphi_n)$) e $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vejamos esta última afirmação.

Dada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, queremos mostrar que $< u_n, \psi > \longrightarrow < u, \psi >$. Mas isto equivale a mostrarmos que $< u, \psi(1-\varphi_n) > \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Seja $\gamma_n = \psi(1-\varphi_n)$ para todo n. Tome $K = S(\psi)$. Então existe $n_0 \in I\!N$ tal que $K \subset K_{n_0}$ (pois $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$). Logo temos uma vizinhança $V_{K_{n_0}}$ de K_{n_0} na qual $\varphi_{n_0} \equiv 1$ e, portanto, $\gamma_{n_0} \equiv 0$ em $V_{K_{n_0}}$. Além disso, de $K_n \subset K_{n+1}$ segue que, para $n \geq n_0$, $\varphi_n \equiv 1$ em $V_{K_{n_0}}$. Logo $\gamma_n \equiv 0$ em $V_{K_{n_0}}$. Como $V_{K_{n_0}}$ contém o suporte de ψ, então $\psi \equiv 0$ fora de $V_{K_{n_0}}$. Logo, $\gamma_n \equiv 0$ em Ω.

Assim, pela linearidade da u,

$$< u, \gamma_n > \;=\; < u, 0 > \;= 0,$$

provando, com isto, a proposição. ■

Teorema 2.3.4. *Tomemos $(u_n)_{n\in I\!N}$ uma seqüência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a seqüência numérica $(< u_n, \varphi >)_{n\in I\!N}$ é convergente. Defina o funcional $u : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ onde para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que*

$$< u, \varphi > \;=\; \lim_{n\to\infty} < u_n, \varphi > .$$

Então, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Prova. Obviamente u é linear, porém a prova da continuidade é mais delicada e não será feita aqui. ■

2.4 Convolução

Iniciemos vendo o que ocorre com as integrais

$$\int f(x-y)g(y)dy \text{ e } \int f(y)g(x-y)dy$$

quando f e g forem contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas, ao menos, possua suporte compacto. Digamos que $S(f)$ seja compacto. Logo, a segunda integral escrita acima é apenas no suporte de f. Através de uma mudança de variável vemos que a primeira integral é também em um compacto, e mais, vemos que elas são iguais. Escrevemos isto pela fórmula

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy.$$

Facilmente podemos ver que $f * g = g * f$. Além desta regra, o leitor pode demonstrar que se f e g forem diferenciáveis em relação à variável x_j $(1 \leq j \leq n)$, então

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

e, por um processo de indução em $|\alpha|$, α multi-índice, que

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g),$$

com a ressalva de que estas expressões façam sentido.

Veremos como estas noções estendem-se para distribuições agora.

Definição 2.4.1 (***Convolução de Distribuição com Função***). *Considere $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Definimos a convolução de u com φ como uma função $u * \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$(u * \varphi)(a) = \ < u, \check{\varphi}_a >,$$

onde $\check{\varphi}_a(x) = \varphi(a-x)$, $\forall a, x \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.4.2. *Sejam $c \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considere a distribuição delta de Dirac centrada em c, δ_c. Então,*

$$(\delta_c * \varphi)(a) = \ < \delta_c, \varphi(a-x) > \ = \varphi(a-c).$$

Em particular, quando $c = 0$, temos que $\delta * \varphi = \varphi$.

Teorema 2.4.3. *Dadas $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), então a função $(u * \varphi) \in C^\infty$ e mais, para todo multi-índice α valem,*

1) $\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$ e

2) $S(u * \varphi) \subset S(u) + S(\varphi)$.

Prova. Provaremos para o caso $u \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^n)$. A outra situação segue uma demonstração semelhante. Comecemos pelo item 2).

Suponha que $c \notin S(u) + S(\varphi)$. Queremos mostrar que $c \notin S(u * \varphi)$. Como $c \notin S(u) + S(\varphi)$, então $S(u) \cap S(\check{\varphi}_c) = \emptyset$, pois se $S(u) \cap S(\check{\varphi}_c) \neq \emptyset$ então existiria $b \in S(u) \cap S(\check{\varphi}_c)$, o que equivale a $b \in S(u)$ e $b \in S(\check{\varphi}_c)$. Desta última pertinência concluímos que existe $s \in S(\varphi)$ tal que $b = c - s$ e daqui sai que $c = b + s$, isto é, $c \in S(u) + S(\varphi)$. Absurdo! Portanto, de fato temos

$$S(u) \cap S(\check{\varphi}_c) = \emptyset.$$

Logo, $(u*\varphi)(c) = < u, \check{\varphi}_c > = 0$. Além disso, por repetição do processo, temos que $(u * \varphi)(x) = 0$ para cada x em alguma vizinhança de c. Logo, fica caracterizado que $c \notin S(u * \varphi)$, provando assim o item 2).

Vejamos agora o item 1). Inicialmente, procuremos mostrar que $u * \varphi$ possui derivadas parciais de primeira ordem. Para isto, seja $c \in I\!R^n$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$ quaisquer, porém fixos doravante. Tome $(h_k)_{k \in I\!N} \subset I\!R$ satisfazendo $h_k \neq 0$ para todo k natural e $h_k \longrightarrow 0$. Afirmamos que a seqüência

$$\frac{\check{\varphi}_{c+h_k e_j} - \check{\varphi}_c}{h_k} \longrightarrow \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j} \text{ em } C_0^\infty.$$

Mostraremos esta afirmação mais abaixo, por enquanto assuma-a verdadeira. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u * \varphi)}{\partial a_j}(c) &= \lim_{h_k \to 0} \frac{(u * \varphi)(c + h_k e_j) - (u * \varphi)(c)}{h_k} \\
&= \lim_{h_k \to 0} < u, \frac{\check{\varphi}_{c+h_k e_j} - \check{\varphi}_c}{h_k} > \\
&= \quad < u, \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j} > \ = (u * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j})(c).
\end{aligned}$$

Logo, pela arbitrariedade de (h_k), de j e de c, temos que $u * \varphi$ admite derivadas parciais de primeira ordem em $I\!R^n$ e

$$\frac{\partial(u * \varphi)}{\partial a_j} = u * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Agora, considere

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial u}{\partial x_j} * \varphi)(c) &= \quad < \frac{\partial u}{\partial x_j}, \check{\varphi}_c > \quad = \quad - \quad < u, \frac{\partial(\varphi(c-x))}{\partial x_j} > \\
&= \quad < u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(c-x) > \quad = (u * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j})(c).
\end{aligned}
$$

Finalmente, para obter as fórmulas listadas no item 1), aplicamos indução em $|\alpha|$.

Por último, mostremos que $\psi_k = \frac{\check{\varphi}_{c+h_k e_j} - \check{\varphi}_c}{h_k} \to \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j}$ em C_0^∞. Assim como as induções citadas acima, a prova de que existe um compacto $K \subset I\!R^n$ tal que $S(\psi_k) \subseteq K$ para todo $k \in I\!N$ será deixada a cargo do leitor. Concentremo-nos então em mostrar que $|\partial^\alpha(\psi_k - \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j})| \to 0$ uniformemente em K seja qual for o multiíndice α. Através do Teorema do Valor Médio podemos escrever, para $\theta_1(x)$, $\theta_2(x) \in (0,1)$,

$$
\begin{aligned}
\psi_k - \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j} &= \frac{1}{h_k}[\varphi(c-x+h_k e_j) - \varphi(c-x)] - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(c-x) \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(c-x+\theta_1(x)h_k e_j) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(c-x) \\
&= h_k \theta_1(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}(c-x+\theta_1(x)\theta_2(x)h_k e_j).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\left| \psi_k - \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j} \right| = |h_k| . \left| \theta_1(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}(c-x+\theta_1(x)\theta_2(x)h_k e_j) \right| \leq C(\varphi)|h_k|,
$$

onde $C(\varphi)$ é uma constante que depende apenas de φ. Logo, de $h_k \longrightarrow 0$ temos que $\psi_k \longrightarrow \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j}$ uniformemente em $I\!R^n$. De modo análogo, dado α multi-índice qualquer, temos

$$
\left| \partial^\alpha \left(\psi_k - \frac{\partial \check{\varphi}_c}{\partial x_j} \right) \right| \leq C_\alpha(\varphi)|h_k| \longrightarrow 0 \text{ uniformemente em } I\!R^n,
$$

concluindo assim a prova. ∎

Observação: Note que na fórmula $\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$, o primeiro membro é a derivada em relação à variável a e nos "segundos" membros a derivada é em relação à variável x. No entanto, quando calculadas em c elas coincidem.

Teorema 2.4.4 (***Associatividade***). *Dadas* $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ *e* $u \in \mathcal{D}'$, *então*

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi).$$

Prova. Sejam $\psi, \varphi \in C_0^\infty$, $\varepsilon > 0$, e as somas de Riemann, com m percorrendo $\mathbb{Z}^n$,

$$s_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_m \varphi(x - \varepsilon m)\psi(\varepsilon m).$$

Note que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} s_\varepsilon(x) = (\varphi * \psi)(x)$ para cada $x \in I\!R^n$. Afirmo que $s_\varepsilon \to \varphi * \psi$ em C_0^∞. Vejamos.

Como $S(s_\varepsilon) \subset S(\varphi) + S(\psi) + \varepsilon\overline{B(0,1)}$, então temos que $S(s_\varepsilon)$ é compacto e além disso, supondo sem perda de generalidade que $0 < \varepsilon \leq 1$, então podemos ver facilmente que existe um compacto $K \subset I\!R^n$ tal que $S(s_\varepsilon) \subset K$ para todo $0 < \varepsilon \leq 1$. Ainda trabalhando com a primeira inclusão citada, temos que o somatório acima possui uma quantidade finita de parcelas não nulas. Logo, dado um multi-índice α temos, $\forall x \in I\!R^n$,

$$\partial^\alpha(s_\varepsilon(x)) = \varepsilon^n \sum_m \partial^\alpha\left(\varphi(x - \varepsilon m)\right)\psi(\varepsilon m) \to (\partial^\alpha\varphi * \psi)(x) = \partial^\alpha(\varphi * \psi)(x).$$

Portanto, a convergência é uniforme e, com isso, finalizamos a prova de que $s_\varepsilon \to \varphi * \psi$ em C_0^∞.

Agora, dado $c \in I\!R^n$ um elemento arbitrário,

$$\begin{aligned}
[u * (\varphi * \psi)](c) &= lim < u, s_\varepsilon(c - x) > \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^n \sum_m \psi(\varepsilon m) < u, \varphi(c - x - \varepsilon m) > \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^n \sum_m \psi(\varepsilon m)(u * \varphi)(c - \varepsilon m) = [(u * \varphi) * \psi](c).
\end{aligned}$$

E pela arbitrariedade de c, segue o resultado. ■

Teorema 2.4.5. $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Prova. Como sabemos, $\mathcal{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo, basta mostrarmos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Seja então $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ uma distribuição arbitrária. Tome $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ como no Exemplo 2.1.2 e para cada $\varepsilon > 0$, ponha $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ e defina $u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x)$ onde x pertence a $I\!R^n$. Pelo Teorema 2.4.3 temos que $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.

Tome, agora, uma $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer. Observe que $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$ e que $\check{\check{\psi}}(x) = \psi(x)$. Assim, olhando para u_ε como distribuição,

$$< u_\varepsilon, \psi > \ = \ < u * \varphi_\varepsilon, \psi > \ = [(u * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi}](0) = [u * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi})](0) = \ < u, \check{\gamma}_\varepsilon >,$$

onde $\gamma(x) = (\varphi_\varepsilon * \check{\psi})(x)$. Agora, note que

$$\gamma_\varepsilon = \check{\psi}_\varepsilon \text{ (regularizada de } \check{\psi}),$$

e, portanto, sabemos que $\gamma_\varepsilon \longrightarrow \check{\psi}$ uniformemente em Ω e, sem maiores dificuldades, concluímos que $\gamma_\varepsilon \longrightarrow \check{\psi}$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Assim,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < u_\varepsilon, \psi > \ = \lim_{\varepsilon \to 0} < u_\varepsilon, \check{\gamma}_\varepsilon > \ = \ < u, \check{\check{\psi}} > \ = \ < u, \psi > .$$

Pela arbitrariedade da ψ segue o resultado procurado. ■

Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ com ao menos uma delas possuindo suporte compacto e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer. Digamos inicialmente que $S(u_2)$ seja compacto. Então, pelo Teorema 2.4.3, $u_2 * \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e, portanto, a expressão $[u_1 * (u_2 * \varphi)](c)$ faz sentido para qualquer $c \in I\!R^n$. Analogamente, supondo agora que $S(u_1)$ seja compacto, então obviamente $u_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e, além disso, novamente usando o Teorema 2.4.3 podemos afirmar que $u_2 * \varphi \in C^\infty(\Omega)$ e conseqüentemente também temos neste caso que a expressão $[u_1 * (u_2 * \varphi)](c)$ está bem definida seja qual for c em $I\!R^n$. Assim, temos a

Definição 2.4.6 (***Convolução com Distribuição***). *Sejam u_1, u_2 duas distribuições de $\mathcal{D}'(\Omega)$ com ao menos uma delas possuindo suporte compacto. Então, dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definimos,*

$$[(u_1 * u_2) * \varphi](c) = [u_1 * (u_2 * \varphi)](c), \ \forall c \in I\!R^n.$$

Teorema 2.4.7. *Sejam $u_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $u_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Então,*

1) $S(u_1 * u_2) \subset S(u_1) + S(u_2)$ *e*

2) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

Prova. 1) Tome $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\int \varphi = 1$, $S(\varphi) = \overline{B(0,1)}$ e $\varphi \geq 0$ e considere a função $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}(\frac{x}{\varepsilon})$. Assim, usando o item 2) do Teorema 2.4.3, temos

$$S((u_1 * u_2) * \varphi_\varepsilon) = S(u_1 * (u_2 * \varphi_\varepsilon)) \subseteq S(u_1) + S(u_2 * \varphi_\varepsilon) \subseteq S(u_1) + S(u_2) + S(\varphi_\varepsilon).$$

No entanto, quando $\varepsilon \to 0$ concluímos que $S(\varphi_\varepsilon) \to \{0\}$ pois $\varphi_\varepsilon \to \delta$ (Exemplo 2.3.2). Logo, na inclusão descrita acima e fazendo ε tender a zero, obtemos $S\left[(u_1 * u_2) * \delta\right] \subseteq S(u_1) + S(u_2) + \{0\}$, isto é,

$$S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2),$$

como queríamos.

2) Sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrárias. Usando comutatividade de convolução de funções e o Teorema 2.4.4,

$$\begin{aligned} (u_1 * u_2) * (\varphi * \psi) &= u_1 * [u_2 * (\varphi * \psi)] = u_1 * [(u_2 * \varphi) * \psi] \\ &= u_1 * [\psi * (u_2 * \varphi)] = (u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi). \end{aligned}$$

De modo análogo, também temos que $(u_2 * u_1) * (\varphi * \psi) = (u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi)$ e isto nos dá que

$$(u_1 * u_2) * (\varphi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\varphi * \psi), \ \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tomando agora ψ_ε de modo que $\varphi * \psi_\varepsilon \to \varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ e fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos a relação

$$(u_1 * u_2) * \varphi = (u_2 * u_1) * \varphi$$

que calculada em zero,

$$< u_1 * u_2, \check{\varphi} > \ = \ < u_2 * u_1, \check{\varphi} >$$

e isto equivale a $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ pois a φ tomada foi qualquer. ■

2.5 Transformada de Fourier

Começaremos dando uma olhada no conceito clássico de Transformada de Fourier para, logo em seguida, passarmos ao de Transformada de Fourier de Distribuições.

Definição 2.5.1 (***Transformada de Fourier***). *Seja f uma função de L^1. A transformada de Fourier de f é a função $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx,$$

onde $x.\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j.\xi_j$.

Seja, agora, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ um elemento qualquer, porém fixo. Tome $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma seqüência tal que $\xi_k \to \xi_0$. Naturalmente, $\left|e^{-ix.\xi_k} - e^{-ix.\xi_0}\right| \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, temos que a seqüência $\varphi_k(x) = (e^{-ix.\xi_k} - e^{-ix.\xi_0})f(x) \to 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$|\varphi_k| \leq 2\,|f| \;\; q.t.p.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx = 0,$$

isto é, $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi_k} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi_0} f(x)dx$, ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi_0).$$

E, finalmente, pela arbitrariedade da seqüência (ξ_k) segue que $\widehat{f}$ é contínua.

Outra propriedade de $\widehat{f}$ é a limitação. De fato,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\varepsilon} f(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 .$$

Logo, $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

Proposição 2.5.2 (***Lema de Riemann-Lebesgue***). *Dada $f \in L^1$, então $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $\|\xi\| \to \infty$.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Inicialmente, tome $f \in C_0^\infty$ arbitrária e $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Naturalmente $\partial_j f \in L^1$. Considere $M > 0$ satisfazendo $\frac{1}{M}\|\partial_j f\|_1 < \varepsilon$ e também $S(f) \subset A$, onde A é um cubo de centro na origem e lado $2M$. Agora, note que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx = \int_{-M}^{M} \dots \int_{-M}^{M} e^{-ix.\xi} f(x)dx_j d\tilde{x}$$

onde $d\tilde{x} = dx_1 dx_2 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n$. Se $\xi_j \neq 0$ e aplicando integração por partes obtemos,

$$\int_{-M}^{M} e^{-ix.\xi} f(x)dx_j = \frac{1}{i\xi_j} \int_{-M}^{M} e^{-ix.\xi} \partial_j f(x)dx_j$$

e, portanto, podemos escrever,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \partial_j f(x)dx.$$

Então, para $|\xi_j| > M$,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{|\xi_j|} \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix.\xi} \partial_j f(x)\right| dx = \frac{1}{|\xi_j|} \|\partial_j f\|_1 < \varepsilon.$$

E isto mostra que $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $\|\xi\| \to \infty$ para o caso $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Suponha agora que $f \in L^1$. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em L^1, então existem uma função $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ e, pelo descrito acima, um número $M > 0$ tal que $|\widehat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $\|\xi\| > M$. Desta forma, escrevendo,

$$e^{-ix.\xi} f(x) = [e^{-ix.\xi} f(x) - e^{-ix.\xi} g(x)] + e^{-ix.\xi} g(x)$$

temos, para $\|\xi\| > M$,

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix.\xi}[f(x) - g(x)]\right| dx + \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} g(x)dx\right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

finalizando a demonstração. ■

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, diremos que esta função será de *decaimento rápido* se f for de classe C^∞ e se satisfizer,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} x^\beta \partial^\alpha f(x) = 0,\ \forall \alpha, \beta \text{ multi-índices.}$$

Deixaremos para o leitor mostrar o fato de que dados dois multi-índices α, β quaisquer, então $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} x^\beta \partial^\alpha f(x) = 0$ se, e somente se, existir uma constante $M = M(\alpha, \beta) > 0$, de modo que $\left| x^\beta \partial^\alpha f(x) \right| \leq M$, $\forall x \in I\!R^n$. Nestas condições temos que uma função f será de decrescimento rápido se, e somente se, $f \in C^\infty$ e se $sup_{I\!R^n} \left| x^\beta \partial^\alpha f(x) \right|$ for finito para todos α e β.

Definição 2.5.3 (***O espaço*** $\mathcal{S}$). *O espaço $\mathcal{S}$ é o conjunto de todas as funções $f : I\!R^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de decaimento rápido.*

Exemplo 2.5.4. *Como facilmente se verifica, o espaço $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{S}$. No entanto a inclusão contrária não é verdadeira pois a função f, definida em $I\!R^n$, dada por $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ está em $\mathcal{S}$, porém não em $C_0^\infty(\Omega)$.*

Definição 2.5.5 (***Convergência em*** $\mathcal{S}$). *Uma dada seqüência $\left(\varphi_j\right) \subset \mathcal{S}$ convergirá a zero em $\mathcal{S}$ se para quaisquer multi-índices α e β a seqüência definida (para cada x de $I\!R^n$ e para cada j natural) por $\psi_j(x) = x^\beta \partial^\alpha \varphi_j(x)$ convergir uniformemente a zero em $I\!R^n$. Denotamos $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$.*

Naturalmente temos que $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathcal{S}$ se $\psi_j = \left(\varphi_j - \varphi\right) \to 0$ em $\mathcal{S}$.

Exemplo 2.5.6. *Dados $\varphi \in \mathcal{S}$ e uma seqüência de números complexos (a_j) tal que $a_j \to 0$, então a seqüência $\varphi_j(x) = a_j \varphi(x)$, onde $x \in I\!R^n$, converge para zero em $\mathcal{S}$.*

Teorema 2.5.7. *Dados α multi-índice e $\varphi \in \mathcal{S}$, então valem:*

1) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ *e*

2) $\widehat{x^\alpha \varphi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.

Além disto, o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, onde $\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi)$, está bem definido e é contínuo.

Prova de 1). Sejam $\varphi \in \mathcal{S}$ e α quaisquer. Usaremos indução em $|\alpha|$. Considere $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e e_j o multíndice constituído por 1 na sua j-ésima coordenada e por zero nas demais. Note que $|e_j| = 1$ e que estamos procurando dar o passo inicial da prova por indução. Desta forma, integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi}\partial_j\varphi(x)dx_j = (i\xi_j)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi}\varphi(x)dx_j.$$

E daí concluímos que $\widehat{\partial_j\varphi}(\xi) = i\xi_j\widehat{\varphi}\left(\xi\right)$. Multiplicando por $(-i)$ e observando que $\xi_j = \xi^{e_j}$, obtemos

$$\widehat{D^{e_j}\varphi}\left(\xi\right) = \xi^{e_j}D^{e_j}\widehat{\varphi}\left(\xi\right).$$

Pelas arbitrariedades de j e de φ, fica provado que a igualdade 1) é válida para qualquer multi-índice de ordem 1 e para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$.

Suponha agora que a relação 1) seja válida sejam quais forem α multi-índice de ordem $k \in I\!N$ e φ função de $\mathcal{S}$. Dado α um multi-índice de ordem $k+1$ qualquer, então podemos escrever $\alpha = \beta + e_j$ onde β é um multi-índice de ordem k e $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Assim,

$$\widehat{D^{\alpha}\varphi}(\xi) = \widehat{D^{\beta}D^{e_j}}\varphi(\xi) = \xi^{\beta}\widehat{D^{e_j}\varphi}(\xi) = \xi^{\beta}\xi^{e_j}\widehat{\varphi}(\xi) = \xi^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi),$$

como queríamos.

Prova de 2): Novamente indução na ordem do multi-índice, porém, antes disso veja que dado um multi-índice β qualquer,

$$\left|x^{\beta}\varphi(x)\right| = \left|\frac{x^{\beta}(\|x\|^2+1)^{n+1}\varphi\left(x\right)}{(\|x\|^2+1)^{n+1}}\right| \leq \frac{C}{(\|x\|^2+1)^{n+1}}.$$

Logo, pelo Teorema 1.2.1 concluímos que $x^{\beta}\varphi \in L^1$ e portanto o lado esquerdo da igualdade em 2) faz sentido.

Tome $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e e_j como na prova de 1). Derivando $\widehat{\varphi}\left(\xi\right)$ sob o sinal de integração obtemos,

$$\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\xi_j}(\xi) = (-i)\int_{I\!R^n} e^{-ix.\xi}x_j\varphi\left(x\right)dx.$$

E desta igualdade concluímos que $\widehat{x^{e_j}\varphi}(\xi) = (-1)^{|e_j|}D^{e_j}\widehat{\varphi}(\xi)$. Dada a arbitrariedade de j e da φ, verificamos então que a relação 2) é verdadeira para qualquer multi-índice de ordem 1 e para toda $\varphi \in \mathcal{S}$.

Suponha que temos garantida a validade da igualdade 1) para todo multi-índice de ordem k e para toda φ. Assim, dado α multi-índice de ordem $k+1$, temos como na parte 1) que $\alpha = \beta + e_j$ e portanto,

$$\begin{aligned} \widehat{x^{\alpha}\varphi}(\xi) &= \widehat{x^{\beta}x^{e_j}\varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|}D^{\beta}\widehat{x^{e_j}\varphi}(\xi) \\ &= (-1)^{|\beta|}(-1)^{|e_j|}D^{\beta}D^{e_j}\widehat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi), \end{aligned}$$

finalizando 2).

$\mathcal{F}$ está bem definido: Observamos inicialmente que $\mathcal{F}$ é linear. Agora, usando as fórmulas 1) e 2) provadas acima podemos ver que

$$\xi^{\alpha}D^{\beta}\widehat{\varphi}\,(\xi) = \xi^{\alpha}(-1)^{|\beta|}\widehat{x^{\beta}\varphi}\,(\xi) = (-1)^{|\beta|}\,\widehat{D^{\alpha}\left(x^{\beta}\varphi\right)}\,(\xi)\,.$$

E daí,

$$\begin{aligned} \left|\xi^{\alpha}D^{\beta}\widehat{\varphi}\,(\xi)\right| &\le \int_{I\!R^n}\left|D^{\alpha}\left(x^{\beta}\varphi\right)(x)\right|dx = \int_{I\!R^n}\left|\frac{(\|x\|^2+1)^{n+1}D^{\alpha}\left(x^{\beta}\varphi\right)(x)}{(\|x\|^2+1)^{n+1}}\right|dx \\ &\le \sup_{I\!R^n}\left|(\|x\|^2+1)^{n+1}D^{\alpha}\left(x^{\beta}\varphi\right)(x)\right|\left(\int_{I\!R^n}\frac{1}{\left|\|x\|^2+1\right|^{n+1}}dx\right) \\ &\le C(\alpha,\beta).a, \end{aligned}$$

onde a é a integral. Logo, $\mathcal{F}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ e, portanto, bem definido.

$\mathcal{F}$ é contínuo: Seja $\left(\varphi_j\right) \subset \mathcal{S}$ uma seqüência que converge para zero em $\mathcal{S}$. Então, como na última cadeia de desigualdades acima,

$$\left|\xi^{\alpha}D^{\beta}\widehat{\varphi}_j\,(\xi)\right| \le c_j.a \to 0,$$

pois $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$. Como o exposto não depende da particular escolha de $\xi \in I\!R^n$, segue a convergência uniforme. Isto mostra que $\mathcal{F}(\varphi_j) \to 0$ em $\mathcal{S}$ e, portanto, que $\mathcal{F}$ é contínuo. ∎

Exemplo 2.5.8. *Considere $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$, onde x pertence a $I\!R$. Sem a menor dificuldade podemos verificar que φ satisfaz o problema $\begin{cases} \varphi'(x) + x\varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$. Agora, aplicando a transformada de Fourier à EDO $y'(x) + xy(x) = 0$ obtemos $i\xi\widehat{\varphi}(\xi) + i\widehat{\varphi}'(\xi) = 0$ e daí,*

$$\widehat{\varphi}'(x) + x\widehat{\varphi}(x) = 0.$$

Logo $\widehat{\varphi}$ também é solução desta EDO. Além disso, usando o método de separação de variáveis vemos que $\widehat{\varphi}(\xi) = c.\varphi(\xi)$ e, juntando com o fato de que $\varphi(0)$ vale 1, concluímos que $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0).\varphi(\xi)$. Daqui,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}\left(\int_{I\!R} e^{-x^2/2}dx\right) = (2\pi)^{1/2}e^{-\xi^2/2}.$$

Considerando agora a função $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2/2}$, com $x \in I\!R^n$, e utilizando um artifício análogo ao da prova do resultado $\int_{I\!R^n} e^{-\pi\|x\|^2}dx = 1$, na página 7, chegamos a

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-\|\xi\|^2/2}.$$

Teorema 2.5.9. *$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ dado por $\mathcal{F}[\varphi] = \widehat{\varphi}(\xi)$, $\xi \in I\!R^n$, é continuamente inversível e*

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}] = \varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi,\ \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Prova. Sejam $\varphi \in \mathcal{S}$ qualquer e $\psi(x) = e^{-\|x\|^2/2}$. Pelo Exemplo 2.5.8 temos que $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-\|\xi\|^2/2}$. Agora, dado $\epsilon > 0$, defina $\psi_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)$. Então,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_\epsilon(\xi) &= \int_{I\!R^n} e^{-ix.\xi}\psi(\epsilon x)dx = \epsilon^{-n}\int_{I\!R^n} e^{-iy.\frac{\xi}{\epsilon}}\psi(y)dy\\ &= \epsilon^{-n}\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) = \epsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\psi\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

De posse desta igualdade, considere então

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^n}\psi_\epsilon(\xi)e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi &= \int_{I\!R^n}\psi_\epsilon(\xi)e^{ix.\xi}\int_{I\!R^n}e^{-iy.\xi}\varphi(y)dyd\xi\\ &= \int_{I\!R^n}\varphi(y)\int_{I\!R^n}e^{-i(y-x).\xi}\psi_\epsilon(\xi)d\xi dy\\ &= \int_{I\!R^n}\varphi(y)\widehat{\psi}_\epsilon(y-x)dy\\ &= \epsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\int\varphi(y)\psi\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right)dy.\end{aligned}$$

Através da mudança de variáveis $z = \frac{y-x}{\epsilon}$, nesta última integral, obtemos,

$$\int_{I\!R^n}\psi_\epsilon(\xi)e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^{n/2}\int\varphi(x+\epsilon z)\psi(z)dz. \tag{2.7}$$

Por outro lado, $\varphi\left(x+\epsilon z\right)\psi(z) \rightarrow \varphi(x)\psi(z)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Além disso, facilmente conclui-se que $\left|\varphi\left(x+\epsilon z\right)\psi(z)\right| \leq c_1\left|\psi(z)\right|$, com c_1 uma constante. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$(2\pi)^{n/2}\int \varphi(x+\epsilon z)\psi(z)dz \underset{\epsilon\rightarrow 0}{\longrightarrow} (2\pi)^{n/2}\varphi(x)\int \psi(z)dz = (2\pi)^n\varphi(x).$$

De modo análogo concluímos, também, que

$$\int_{I\!R^n} \psi_\epsilon(\xi)e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \underset{\epsilon\rightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{I\!R^n} e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Assim, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (2.7) obtemos

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Quanto à continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$, prova-se de forma semelhante à feita na continuidade de $\mathcal{F}$. ■

Teorema 2.5.10. *Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Então,*

1) $\int_{I\!R^n}\widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int_{I\!R^n}\varphi(\xi)\widehat{\psi}(\xi)d\xi$
2) $\int_{I\!R^n}\varphi(\xi)\overline{\psi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n\int_{I\!R^n}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi$
3) $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}(\xi)$.
4) $\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = (2\pi)^n\check{\varphi}$
5) $\widehat{\varphi\psi}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\widehat{\varphi}*\widehat{\psi})(\xi)$

Prova de 1): Como φ e ψ são suficientemente regulares, então podemos inverter a ordem de integração sem problemas. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^n}\widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)d\xi &= \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x)\psi(\xi)dxd\xi\\ &= \int_{I\!R^n}\varphi(x)\int_{I\!R^n} e^{-ix.\xi}\psi(\xi)d\xi dx\\ &= \int_{I\!R^n}\varphi(x)\widehat{\psi}(x)dx,\end{aligned}$$

como procurávamos.

Prova de 2): Tome $\widehat{\varphi} = \overline{\beta}$, onde β é um elemento de $\mathcal{S}$. Agora, observe que

$$\overline{\widehat{\beta}}(\xi) = \overline{\int_{I\!R^n} e^{-ix.\xi}\beta(x)dx} = \int_{I\!R^n} e^{ix.\xi}\overline{\beta}(x)dx = \int_{I\!R^n} e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(x)dx = (2\pi)^n\varphi\left(\xi\right).$$

E assim,

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\overline{\psi}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\overline{\beta}}(\xi)\overline{\psi}(\xi)d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\beta}(\xi)\psi(\xi)d\xi} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \beta(\xi)\widehat{\psi}(\xi)d\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\beta}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi,
\end{aligned}
$$

daí derivando-se a fórmula em 2).

Prova de 3): Temos,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} (\varphi * \psi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x-y)\psi(y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)e^{-iy.\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y).\xi}\varphi(x-y)dxdy = \widehat{\psi}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}
$$

Prova de 4): Como,

$$
\widehat{\widehat{\varphi}}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i.x(-\xi)}\widehat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\widehat{\varphi}(x)\,dx = (2\pi)^n\varphi(\xi),
$$

obtemos, chamando $-\xi = y$, a expressão procurada.

Prova de 5): Inicialmente, considere $\widehat{\widehat{\varphi\psi}}(\xi) = (2\pi)^n\varphi(-\xi)\,\psi(-\xi)$, justificado pela aplicação de 4). Por outro lado, pelo uso de 3),

$$
(2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}}(\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi)\,\widehat{\widehat{\psi}}(\xi) = (2\pi)^{-n}(2\pi)^n\varphi(-\xi)\,(2\pi)^n\psi(-\xi)\,.
$$

Logo,

$$
\widehat{\widehat{\varphi\psi}}(\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}}(\xi).
$$

Aplicando a transformada inversa, obtemos a relação procurada. ■

A fim de estudarmos a Transformada de Fourier de Distribuições, necessitaremos da

Definição 2.5.11 (***Distribuição Temperada***). *Uma distribuição temperada é um funcional linear $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. O conjunto das distribuições temperadas será indicado por $\mathcal{S}'$.*

Observações: $i)$ Considere $\varphi \in \mathcal{S}$ uma função qualquer. Agora, olhe para $\psi \in C_0^\infty(I\!R^n)$ valendo 1 numa vizinhança da origem. Defina, para $\varepsilon > 0$, a função $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$. Nestas condições, temos que $\psi_\varepsilon \varphi \to \varphi$ em $\mathcal{S}$ e, conseqüentemente, fica provado que $C_0^\infty(I\!R^n)$ é denso em $\mathcal{S}$. Com esta informação podemos ver $\mathcal{S}'$ como subespaço de $\mathcal{D}'(I\!R^n)$, desta forma, $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{S}'$.

$ii)$ Como $\mathcal{S} \subset C^\infty(I\!R^n)$, vemos que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$.

Teorema 2.5.12. *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}$. Então, u é contínuo se, e somente se, existem constantes $C > 0$ e $m \in I\!N \cup \{0\}$ tais que*

$$|u(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{I\!R^n} \left| (1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \psi(x) \right|, \ \forall \psi \in \mathcal{S}.$$

Prova. A demonstração deste reultado é semelhante à feita no Teorema 2.2.25 e será deixada para o leitor. ∎

Definição 2.5.13 (***Transformada em*** $\mathcal{S}'$). *Dada $u \in \mathcal{S}'$, definimos a sua transformada de Fourier (denotamos $\widehat{u}$) por*

$$< \widehat{u}, \varphi > \ = \ < u, \widehat{\varphi} >, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Notas: $i)$ Pelo Teorema 2.5.9 temos que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e, portanto, $\widehat{u}$ está bem definido. Além disso, tomando $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ temos que $\widehat{\varphi}_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ (ver prova do Teorema 2.5.7) e, daí, concluímos que $\widehat{u}$ é contínuo. Desde que $\widehat{u}$ é linear, segue que $\widehat{u}$ é uma distribuição temperada.

$ii)$ Como o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ é contínuo com inversa contínua, então o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ também é contínuo com inversa contínua.

$iii)$ O Teorema 2.5.12 nos garante que $L^p(I\!R^n) \subset \mathcal{S}'$, $1 \leq p \leq \infty$. Mais geralmente, toda função mensurável f tal que para algum $\alpha \in I\!R$ satisfazendo uma desigualdade do tipo $|f(x)|\,(1 + |x|^2)^\alpha \leq g(x)$, com g pertencente a L^p para algum p, então f é uma distribuição temperada.

Exemplo 2.5.14. *Seja δ_c a distribuição de Dirac centrada em $c \in I\!R^n$. Então $\widehat{\delta}_c = e^{-ix.c}$. Em particular $\widehat{\delta} = 1$.*

Solução. De fato, seja $\varphi \in \mathcal{S}$ uma função qualquer. Assim,

$$< \widehat{\delta}_c, \varphi > \;=\; < \delta_c, \widehat{\varphi} > \;= \widehat{\varphi}\,(c) = \int e^{-ix.c}\varphi(x)dx = \; < e^{-ix.c}, \varphi >,$$

como procurávamos. ■

Teorema 2.5.15. *Sejam $f \in L^1$, $g \in L^2$, $u \in \mathcal{E}'$, $v \in \mathcal{S}'$ e α um multi-índice. Então:*

1) *A transformada de Fourier de f, como função ou como distribuição temperada coincidem;*

2) $\widehat{g} \in L^2$ *e* $\|g\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\widehat{g}\|_2^2$;

3) $\widehat{u} \in C^\infty$ *e é dada por* $\widehat{u}(\xi) = < u, e^{-ix.\xi} >$;

4) $\widehat{D^\alpha v} = \xi^\alpha \widehat{v}$ *e* $\widehat{\widehat{v}} = (2\pi)^n \check{v}$.

Prova de 1)**:** Denotemos por $\widehat{f}$ e $\widetilde{f}$ as transformadas de Fourier de f como função e como distribuição temperada, respectivamente. Queremos mostrar que $< \widehat{f}, \varphi > = < \widetilde{f}, \varphi >$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. Para isto, sejam $\varphi \in \mathcal{S}$ qualquer e $\left(\psi_j\right) \subset \mathcal{S}$, com $\psi_j \to f$ em L^1. Afirmamos que $\widehat{\psi}_j\varphi \to \widehat{f}\varphi$ em L^1. Mostremos esta afirmação.

De fato, dado $\xi \in I\!R^n$ um elemento qualquer,

$$\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\psi}_j\,(\xi)\right| \leq \int \left|f(x) - \psi_j\,(x)\right| dx = \left\|f - \psi_j\right\|_1 \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Portanto, $\widehat{f}(\xi) - \widehat{\psi}_j\,(\xi) \to 0$, $\forall \xi \in I\!R^n$. Assim, $\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\psi}_j\,(\xi)\right| |\varphi\,(\xi)| \to 0$ quando j tende para infinito. Além disso, temos que $\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\psi}_j\,(\xi)\right| |\varphi\,(\xi)| \leq c\,|\varphi\,(\xi)|$, $\forall j$ natural. Logo, estamos em condições de aplicar o Teorema da Convergência Dominada para concluirmos que

$$\lim_{j \to \infty} \int [\widehat{f}(\xi) - \widehat{\psi}_j\,(\xi)] \varphi\,(\xi)\, d\xi = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} < \widetilde{f}, \varphi > \;&=\; < f, \widehat{\varphi} > \;= \int f\,(\xi)\,\widehat{\varphi}\,(\xi)\,d\xi = \lim_{j \to \infty} \int \psi_j\,(\xi)\,\widehat{\varphi}\,(\xi)\,d\xi \\ &= \lim_{j \to \infty} \int \widehat{\psi}_j\,(\xi)\,\varphi\,(\xi)\,d\xi = \int \widehat{f}\,(\xi)\,\varphi\,(\xi)\,d\xi = \; < \widehat{f}, \varphi >, \end{aligned}$$

como procurado.

Prova de 2): Considere $(\psi_j) \subset \mathcal{S}$, com $\psi_j \to g$ em L^2. Como, seja qual for a função $\gamma \in \mathcal{S}$, $\|\widehat{\gamma}\|_2^2 = (2\pi)^n \|\gamma\|_2^2$, então podemos escrever,

$$\left\|\widehat{\psi}_j - \widehat{\psi}_l\right\|_2^2 = (2\pi)^n \left\|\psi_j - \psi_l\right\|_2^2,$$

e, como resultado, temos que $(\widehat{\psi}_j)$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach L^2. Assim, existe $h \in L^2$ tal que $\widehat{\psi}_j \to h$ em L^2.

Procedendo como na parte 1), obtemos que $\widehat{\psi}_j\varphi \to h\varphi$ em L^1, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} < h, \varphi > &= \int h(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int \widehat{\psi}_j(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \int \psi_j(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx = \int g(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx \\ &= \ < g, \widehat{\varphi} > \ = \ < \widehat{g}, \varphi >, \end{aligned}$$

e, portanto, $\widehat{g} = h \in L^2$. Além disso,

$$\|\widehat{g}\|_2^2 = \lim_{j\to\infty} \left\|\widehat{\psi}_j\right\|_2^2 = \lim_{j\to\infty} (2\pi)^n \left\|\psi_j\right\|_2^2 = (2\pi)^n \|g\|_2^2,$$

como queríamos.

Prova de 3): Seja $\varphi \in C_0^\infty$ tal que $\int \varphi = 1$, com $\varphi \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ e também $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$. Note que, como $u \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in C_0^\infty$, então $u_\varepsilon \in C_0^\infty$ e, por conseguinte, $u_\varepsilon \in L^1$. Além disso, já sabemos que $u_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{E}'$ e, evidentemente, por esta razão $u_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{S}'$. Assim,

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\varepsilon(\xi) &= \int e^{-ix.\xi} u_\varepsilon(x)dx = \ < u_\varepsilon, e^{-ix.\xi} > \ = \ < u * \varphi_\varepsilon, e^{-ix.\xi} > \\ &= (u * \varphi_\varepsilon * e^{ix.\xi})(0) = [u * (\overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix.\xi})^{\vee}](0) \\ &= \ < u, \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix.\xi} > \ = \widehat{\varphi}(\varepsilon\xi). < u, e^{-ix.\xi} > . \end{aligned}$$

Como $\widehat{\varphi}(\varepsilon\xi) \to 1$ em C^∞, então $\widehat{u}_\varepsilon \to \ < u, e^{-ix.(.)} >$ em $\mathcal{S}'$. Conseqüentemente, pela unicidade do limite, temos que,

$$\widehat{u}(\xi) = \ < u, e^{-ix.\xi} > .$$

Prova de 4)**:** Como $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ (Teorema 2.5.7), então

$$\begin{aligned} < \widehat{D^\alpha v}, \varphi > \quad &= \quad < D^\alpha v, \widehat{\varphi} > \ = \ (-1)^{|\alpha|} < v, D^\alpha \widehat{\varphi} > \\ &= \quad (-1)^{|\alpha|} < v, (-1)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi} > \ = \ < \xi^\alpha v, \widehat{\varphi} > \\ &= \quad < \widehat{\xi^\alpha v}, \varphi > . \end{aligned}$$

Finalmente,

$$< \widehat{\widehat{v}}, \varphi > \ = \ < \widehat{v}, \widehat{\varphi} > \ = \ < v, \widehat{\widehat{\varphi}} > \ = \ (2\pi)^n < v, \check{\varphi} > \ = \ (2\pi)^n < \check{v}, \varphi >,$$

terminando a prova deste teorema. ∎

Dados $\Omega \subset I\!\!R^n$ e uma função $f : \Omega \times I\!\!R^m \longrightarrow I\!\!R$ mensurável, suponha que para cada compacto K de Ω

$$\int_K \int_{I\!\!R^m} |f(t,x)| \, dxdt < \infty.$$

Desta forma, pelo Teorema de Fubini, a função f é integrável em x para quase todo t e, portanto, podemos definir a transformada parcial de Fourier na variável x pondo

$$\widetilde{f}(t,\xi) = \int_{I\!\!R^m} e^{-ix.\xi} f(t,x) dx.$$

Como função da variável ξ, $\widetilde{f}$ é uma função contínua para quase todo t. Logo $\widetilde{f} \in L^1_{loc}(\Omega \times I\!\!R^m)$. Isto nos mostra que a transformada parcial de Fourier consiste em manter fixas algumas váriáveis e aplicar a transformada de Fourier nas demais. Contudo, este processo para distribuições precisa de uma explicação mais convincente, para isto, denotaremos por π_1 a projeção em $I\!\!R^n$, isto é:

$$\pi_1 : I\!\!R^n \times I\!\!R^m \longrightarrow I\!\!R \text{ onde } \pi_1(t,x) = t.$$

Às vezes, para enfatizar a transformada parcial de Fourier na variável x, escreveremos $\widetilde{f}_x$.

Definição 2.5.16 (***O espaço*** $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(I\!\!R^m))$). *O conjunto das funções φ pertencentes a $\mathcal{S}(I\!\!R^n \times I\!\!R^m)$ tais que $\pi_1(S(\varphi)) \subset \Omega$ e é compacto, é denotado por $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(I\!\!R^m))$. De um modo mais conciso,*

$$C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(I\!\!R^m)) = \{\varphi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n \times I\!\!R^m);\ \pi_1(S(\varphi)) \subset \Omega \ \textit{e é compacto}\}.$$

Definição 2.5.17 (***Convergência em*** $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$). *Diremos que a seqüência* $(\varphi_j) \subset C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *converge para zero em* $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *(denotamos* $\varphi_j \to 0$ *em* $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$*), se ocorrer que*

1) $\varphi_j \to 0$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e*

2) *Exista um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $S(\varphi_j) \subset K \times \mathbb{R}^m$ *para todo* j *natural.*

Teorema 2.5.18. *Seja* $\mathcal{F} : C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *o operador dado por* $\mathcal{F}[f] = \widetilde{f}_x$. *Então* $\mathcal{F}$ *é um operador contínuo e inversível. Além disso, dados* $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *e* α *um multi-índice, valem*

1) $\widetilde{D_x^\alpha \varphi}(t,\xi) = \xi^\alpha \widetilde{\varphi}(t,\xi)$;

2) $\widetilde{x^\alpha \varphi}(t,\xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \widetilde{\varphi}(t,\xi)$;

3) $\widetilde{D_t^\alpha \varphi}(t,\xi) = D_t^\alpha \widetilde{\varphi}(t,\xi)$ *e*

4) $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\varphi}(t,\xi)\psi(t,\xi) d\xi dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(t,\xi)\widetilde{\psi}(t,\xi) d\xi dt$.

Prova. A fórmula da inversa, neste caso, é dada por

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\xi} \widehat{f}(t,\xi) d\xi,$$

e a prova dela e das demais afirmações são semelhantes ao que foi feito nos Teoremas 2.5.7 e 2.5.9 e, portanto, serão deixadas a cargo do leitor. ∎

Definição 2.5.19 (***Distribuição temperada em*** x). *Qualquer funcional linear* $u : C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)) \longrightarrow \mathbb{C}$ *que seja contínuo é dito ser uma distribuição temperada em* x. *O conjunto das distribuições temperadas em* x *será denotado por* $\mathcal{S}'(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$.

Exemplo 2.5.20. *Seja* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. *Restringindo* u *a* $C_0^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *concluímos imediatamente que* u *é uma distribuição temperada em* x. *Conseqüentemente,* $\mathcal{E}'(\Omega \times \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'(\Omega \times \mathbb{R}^m)$.

Definição 2.5.21 (***Transformada parcial de distribuições***). *Dada u em $\mathcal{S}'(\Omega;\mathcal{S}(I\!R^m))$, definimos a transformada parcial de Fourier de u, indicada por $\widetilde{u}$ ou $\widetilde{u}_x$, pondo*

$$< \widetilde{u}, \varphi > \quad = \quad < u, \widetilde{\varphi} >, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathcal{S}(I\!R^m)).$$

Exemplo 2.5.22. *Considere a distribuição de Dirac centrada em $b = (t_1, c_1)$, um ponto de $I\!R^n \times I\!R^m$. Então, dada $\varphi(t,x) \in C_0^\infty(\Omega;\mathcal{S}(I\!R^m))$, vejamos como se comporta a transformada parcial de δ_b.*

$$< \widetilde{\delta}_b, \varphi > \quad = \quad < \delta_b, \widetilde{\varphi}_x > \quad = \widetilde{\varphi}_x(t_1, c_1) = \int e^{-ix.c_1} \varphi(t_1, x) dx.$$

Esta integral é denotada de um modo conciso por $< \delta_{t_1}(t), \varphi(t,x) >$, onde δ_{t_1} atua como a distribuição delta na primeira variável e como função (integração) $e^{-ix.c_1}$, na segunda. Quando $b = 0$, escrevemos $\widetilde{\delta} = \delta(t)$.

Capítulo 3

HIPOELIPTICIDADE E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

3.1 Hipoelipticidade

A fim de prepararmos o terreno para o conceito de solução fundamental, iniciaremos esta seção com a importante definição de operador hipoelíptico e, então, provaremos resultados relacionados.

Definição 3.1.1 (***Operador hipoelíptico***). *Sejam $\Omega \subseteq I\!R^n$, Ω aberto, m um natural e $a_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funções $(|\alpha| \leq m)$. Diremos que o operador*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

é hipoelíptico em Ω se $SS(P(x, D)u) = SS(u)$ para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observações: $i)$ Caso as funções a_α sejam todas de classe $C^\infty(\Omega)$, temos que para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $P(x, D)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tomando então $c \notin SS(u)$. Sabemos que existem uma vizinhança de c, V_c contida em $\Omega \backslash SS(u)$ e $f : V_c \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^\infty(V_c)$ tais que

$$< u, \varphi > \ = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(V_c).$$

Deste modo, escolhendo uma φ qualquer de $C_0^\infty(V_c)$ e executando alguns cálculos, obtemos

$$< P(x, D)u, \varphi > \ = \int f(x)\psi(x)dx,$$

onde $\psi \in C^{\infty}(V_c)$ e é proveniente das contas efetuadas para obter esta igualdade. Isto mostra que $c \notin SS(P(x,D)u)$, ou seja, que $SS(P(x,D)u) \subseteq SS(u)$. Desta forma, quando os coeficientes do operador forem funções de classe C^{∞}, basta que mostremos a inclusão $SS(u) \subseteq SS(P(x,D)u)$ para provarmos que o operador P é hipoelíptico.

ii) Baseados na definição de suporte singular de uma distribuição, provar que o operador P da Definição 3.1.1 é hipoelíptico, é equivalente a mostrar que para cada conjunto aberto U de Ω e para toda distribuição u de $\mathcal{D}'(\Omega)$, u será de $C^{\infty}(U)$ sempre que $P(x,D)u \in C^{\infty}(U)$. Em contrapartida, para mostrar que o operador P não é hipoelíptico em Ω, basta encontrar um conjunto aberto $U \subset \Omega$ e uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de tal forma que $P(x,D)u \in C^{\infty}(U)$ porém $u \notin C^{\infty}(U)$.

iii) Se $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ for hipoelíptico em Ω e $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfizerem $P(x,D)u = f$, então u pertence a $C^{\infty}(\Omega \backslash S(f))$.

PROPOSIÇÃO 3.1.2. *Suponha que o operador* $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$, *definido em* Ω, *seja hipoelíptico e que tenhamos* $P(x,D)u = P(x,D)v$, *onde temos que* $u, v \in \mathcal{D}'(U)$ *e* $U \subset \Omega$ *é um aberto dado. Nestas condições, existe* $f \in C^{\infty}(U)$ *de modo que* $u = v + f$.

PROVA. Sendo $P(x,D)u = P(x,D)v$, então

$$P(x,D)(u-v) = 0 \in C^{\infty}(U).$$

Desde que P é hipoelíptico, temos que $(u-v) \in C^{\infty}(U)$. Logo, existe uma função $f \in C^{\infty}(U)$ de modo que

$$< u - v, \varphi > \ = \int_U f(x)\varphi(x)\,dx = \ < f, \varphi >, \ \forall \varphi \in C^{\infty}(U),$$

como procurávamos. ∎

Antes de passarmos ao próximo conceito, notamos que uma dada distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ será uma *distribuição analítica* em Ω se existir uma função analítica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$< u, \varphi > \ = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \ \forall \varphi \in C^{\infty}(\Omega).$$

Agora sim podemos enunciar a

Definição 3.1.3 (***Operador hipoelíptico analítico***). *O operador diferencial*

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_{\alpha}(x)D^{\alpha},$$

definido no aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, será dito hipoelíptico analítico se para cada subconjunto aberto U de Ω e para toda u em $\mathcal{D}'(U)$ tal que $P(x,D)u$ for analítica em U tivermos que u é analítica em U também.

Nota: Perceba que todas as observações que seguiram a Definição 3.1.1 se aplicam a um operador hipoelíptico analítico, trocando, evidentemente, C^{∞} por analítico.

Proposição 3.1.4. *Suponha que o operador linear $P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_{\alpha}(x)D^{\alpha}$ seja hipoelíptico analítico no aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Considere ainda duas distribuições u,v tais que $P(x,D)u=P(x,D)v$ em algum subconjunto $U\subseteq\Omega$. Nestas hipóteses temos que existe uma função f, analítica em U, tal que $u=v+f$.*

Prova. Esta demonstração é muito semelhante à feita na Proposição 3.1.2 e será deixada a cargo do leitor. ■

Exemplo 3.1.5. *Dado um número real c, o operador $P(x,D)=(x-c)\frac{d}{dx}$ em $\mathbb{R}$ não é hipoelíptico.*

Solução. De fato, como sabemos $(x-c)\frac{dH_c}{dx}(x)=(x-c)\delta_c=0\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. No entanto, H_c não é $C^{\infty}(\mathbb{R})$. ■

Exemplo 3.1.6. *Dado $c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$. Considere agora o operador de onda*

$$P(t,x,D)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\triangle_x,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Este operador não é hipoelíptico.

Solução. Tome uma função real f de classe C^2 pelo menos, porém não de classe C^{∞}. Defina $u(t,x)=f(x_1+ct)$. Note que $P(t,x,D)u=0\in C^{\infty}$ sem que u seja de classe C^{∞}. ■

Lema 3.1.7. *Seja I um intervalo aberto. Dada $\varphi \in C_0^\infty(I)$, então*

$$\exists \psi \in C_0^\infty(I) \text{ tal que } \psi' = \varphi \Leftrightarrow \int_I \varphi(x)dx = 0.$$

Prova. Suponha que $\int_I \varphi(x)dx = 0$. Se necessário, estenda φ por zero em $\mathbb{R}\backslash I$ e então defina

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

Sem grande obstáculo, vemos que $\psi \in C_0^\infty(I)$. Temos então,

$$\psi'(x) = \varphi(x),$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponha que exista $\psi \in C_0^\infty(I)$ tal que $\psi'(x) = \varphi(x)$ em I. Tome A e B em I tais que $S(\psi) \subseteq [A, B]$. Assim,

$$\int_I \varphi(x)dx = \int_A^B \psi'(x)dx = \psi(A) - \psi(B) = 0,$$

concluindo o lema. ∎

Proposição 3.1.8. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalo aberto, e $u \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $u' = 0$. Então u é constante.*

Prova. Queremos mostrar que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que,

$$< u, \varphi > \; = \int_I c\varphi(x)\, dx, \; \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Para isto, seja $\varphi \in C_0^\infty(I)$ uma função qualquer. Tome $\varphi_0 \in C_0^\infty(I)$ de modo que $\int_I \varphi_0 = 1$. Podemos escrever,

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \left(\int_I \varphi(t)dt\right)\varphi_0(x) + \left(\int_I \varphi(t)dt\right)\varphi_0(x),$$

e, chamando $\gamma(x) = \varphi(x) - (\int_I \varphi(t)dt)\varphi_0(x)$ temos, sem a menor dificuldade, que $\int_I \gamma(x)dx = 0$. Agora, usando o Lema 3.1.7 concluímos que existe $\psi \in C_0^\infty(I)$ tal que $\psi' = \gamma$ em I. Desta forma,

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \left(\int_I \varphi(t)dt\right)\varphi_0(x),$$

e, por conseqüência,

$$< u, \varphi > \;=\; < u, \psi' > + \int_I \varphi(t)dt \;\; < u, \varphi_0 > .$$

Fazendo $< u, \varphi_0 > = c$ e usando que $< u, \psi' > = 0$ por hipótese, chegamos a

$$< u, \varphi > \;= \int_I c\varphi(t)dt = \;\; < c, \varphi >,$$

finalizando a prova. ■

Exemplo 3.1.9. *Sejam I um intervalo aberto e m um número natural. O operador $P_m = \frac{d^m}{dx^m}$ é hipoelíptico em I.*

Solução. Indução em m. Considere $m = 1$. Logo $P_1 = \frac{d}{dx}$. Tome $J \subset I$ um intervalo aberto e $u \in \mathcal{D}'(J)$ satisfazendo que $P_1(D)u \in C^\infty(J)$. Queremos mostrar que $u \in C^\infty(J)$.

Digamos que $P_1(D)u = f$. Defina então

$$g_1(x) = \int_a^x f(t)dt, \;\forall x \in J \text{ e para algum } a \text{ em } J.$$

Como $f \in C^\infty(J)$, então $g_1 \in C^\infty(J)$ e vale

$$g_1'(x) = f(x), \;\forall x \in J.$$

Assim, $P_1(D)g_1 = \frac{dg_1}{dx} = f = P_1(D)u$ e, portanto,

$$P_1(D)\,(g_1 - u) = 0.$$

E agora, usando a Proposição 3.1.8, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $u - g_1 = c$, ou seja, $u = g_1 + c$, evidenciando o fato de que $u \in C^\infty(J)$. Logo, $P_1(D)$ é hipoelíptico em I.

Suponha agora que $P_k(D) = \frac{d^k}{dx^k}$, $k < m$, seja hipoelíptico em I. Queremos mostrar que P_{k+1} é hipoelíptico em I. Considere $J \subseteq I$ um aberto arbitrário e $u \in \mathcal{D}'(J)$ satisfazendo $P_{k+1}(D)u = f \in C^\infty(J)$.

Defina, para cada $j = 1, ..., k+1$,

$$g_j(x) = \int_a^x g_{j-1}(x)dx, \;\forall x \in J,$$

onde a é algum elemento de J e $g_0(x) = f(x)$. Note que $P_j(D)g_j = f$ seja qual for $j \in \{1, 2, ..., k+1\}$. Portanto,

$$P_k\left(P_1\left(D\right)\left(u - g_{k+1}\right)\right) = P_{k+1}\left(D\right)\left(u - g_{k+1}\right) = P_{k+1}\left(D\right)u - P_{k+1}\left(D\right)g_{k+1} = 0.$$

Chamando $P_1\left(D\right)\left(u - g_{k+1}\right) = v$, vemos que v pertence a $\mathcal{D}'\left(J\right)$ e também que $P_k\left(D\right)v = 0$ pertence a $C^\infty\left(J\right)$. Consequentemente, por hipótese de indução temos que $P_1\left(D\right)\left(u - g_{k+1}\right) = v$ está em $C^\infty\left(J\right)$, e assim,

$$P_1\left(D\right)\left(u - g_{k+1}\right) = h \in C^\infty\left(J\right)$$
$$P_1\left(D\right)u = h - P_1\left(D\right)g_{k+1} \in C^\infty\left(J\right).$$

Usando a primeira parte,

$$u \in C^\infty\left(J\right),$$

como procurávamos. ■

Exemplo 3.1.10. *Sejam I intervalo aberto, $a_j : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2, ..., m$, funções de classe $C^\infty\left(I\right)$ e o operador*

$$P_m\left(x, D\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dx} + a_j(x)\right).$$

Afirmamos que P_m é hipoelíptico em I.

Solução. Novamente indução em m. Seja $J \subseteq I$ um intervalo aberto qualquer e $u \in \mathcal{D}'\left(J\right)$ satisfazendo $P_1\left(x, D\right)u = f \in C^\infty\left(J\right)$. Estamos atrás de mostrar que $u \in C^\infty\left(J\right)$.

Considere a distribuição $v = g_1 u$, onde

$$g_1(x) = e^{\int_b^x a_1(t)dt},\ x \in J \text{ e } b \in J \text{ fixo.}$$

Sem maiores dificuldades, temos que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(g_1 u\right) = g_1\left(\frac{du}{dx} + a_1(x)u\right) = g_1 P_1\left(x, D\right)u = g_1 f.$$

E como $g_1 f \in C^\infty\left(J\right)$, pelo Exemplo 3.1.9, $v = g_1 u \in C^\infty\left(J\right)$. Conseqüentemente, a função $u = ve^{\int_b^x a_1(t)dt} \in C^\infty\left(J\right)$.

Suponha agora que $P_k(x,D)$, $k < m$, seja hipoelíptico em I. Queremos mostrar que P_{k+1} é hipoelíptico em I.

Tomemos $J \subseteq I$ um intervalo aberto qualquer e uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(J)$ satisfazendo $P_{k+1}(x,D)u = f \in C^\infty(J)$. Observe que

$$P_{k+1}(x,D)u = P_k(x,D)(Q_{k+1}(x,D)u),$$

onde $Q_{k+1}(x,D) = \frac{d}{dx} + a_{k+1}(x)$.

Chamando $Q_{k+1}(x,D)u = v$, temos que $v \in \mathcal{D}'(J)$, que $P_k(x,D)v = f$ pertence a $C^\infty(J)$ e que a hipótese de indução nos garante que $v \in C^\infty(J)$. Considerando que $Q_{k+1}(x,D)u = v$ e aplicando a prova feita para o caso $m = 1$, concluímos que $u \in C^\infty(J)$, finalizando a prova. ∎

EXEMPLO 3.1.11. *Sejam b_j, $j = 0, 1, ..., m$, números complexos, $b_m \neq 0$. Então o operador diferencial*

$$P(D) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j}{dx^j}$$

é hipoelíptico em $\mathbb{R}$, onde $b_0 \frac{d^0}{dx^0} = b_0$.

Solução. Considere $Q(\xi) = c \sum_{j=0}^{m} c_j \xi^j$, onde $c_j = \dfrac{b_j}{b_m}$. Sejam $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., m$, as raízes deste polinômio. Deste modo podemos escrever,

$$Q(\xi) = c \prod_{j=1}^{m} (\xi - a_j).$$

Conseqüentemente, pelo fato de P ter coeficientes constantes,

$$P(D) = c \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dx} - a_j \right).$$

Sendo $c \neq 0$ e, como $P(D)$ será hipoelíptico se, e somente se, $\frac{1}{c} P(D)$ for hipoelíptico, concluímos que $P(D)$ é hipoelíptico em I (Exemplo 3.1.10). ∎

3.2 Solução Fundamental

Na esteira da seção anterior, estamos prontos para a

Definição 3.2.1 (***Solução fundamental***). *Seja* $P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)D^\alpha$ *um operador diferencial no qual as funções* a_α *estão definidas num aberto* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$*, contendo a origem.*

Uma distribuição $E\in\mathcal{D}'(\Omega)$ *será uma solução fundamental para o operador* $P(x,D)$ *se*

$$P(x,D)\,E=\delta.$$

Teorema 3.2.2. *Seja* $P(D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha D^\alpha$ *um operador diferencial com coeficientes constantes e* $E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *uma solução fundamental para* $P(D)$. *Sejam ainda,* u *e* $v\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

1) *A equação em* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $P(D)\,w=v$ *tem uma solução* $w=E*v$ *e*

2) *Se* $P(D)\,u=f$, *temos* $u=E*f$.

Prova de 1)**:** Como $v\in\mathcal{E}'$, então a expressão $E*v$ está bem definida. Deste modo, tendo P coeficientes constantes,

$$P(D)\,w=P(D)\,(E*v)=(P(D)\,E)*v=\delta*v=v.$$

Prova de 2)**:** Desde que $u\in\mathcal{E}'$, então $P(D)\,u$ pertence a $\mathcal{E}'$ também. Logo faz sentido escrevermos $E*f$. Novamente, usando o fato de que P tem coeficientes constantes,

$$u=u*\delta=u*(P(D)\,E)=P(D)u*E=f*E,$$

terminando a prova. ■

Teorema 3.2.3 (***Solução fundamental*** $\times$ ***hipoelipticidade***). *Sejam o operador com coeficientes constantes* $P(D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha D^\alpha$ *e* $E\in\mathcal{D}'$ *uma solução fundamental de* $P(D)$. *Suponha, adicionalmente, que* $E\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. *Então* $P(D)$ *é hipoelíptico.*

Prova. Seja $U\subseteq\mathbb{R}^n$ um aberto qualquer e não vazio. Tome $u\in\mathcal{D}'(U)$ tal que $P(D)\,u=f\in C^\infty(U)$. Queremos mostrar que $u\in C^\infty(U)$ e, para isto, basta mostrar que dado $c\in U$, então u é de classe C^∞ em alguma vizinhança de c.

Seja $c \in U$ um ponto qualquer, porém fixo. Sendo U aberto, podemos escolher $\varepsilon > 0$ de modo que $\overline{B} = \overline{B(c, 3\varepsilon)} \subset U$. Agora, tome $g \in C_0^\infty(U)$ tal que $g \equiv 1$ numa vizinhança de $\overline{B}$. Usando a fórmula de Leibniz, temos,

$$\begin{aligned} P(D)(gu) &= \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha (gu) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta g D^\gamma u \\ &= \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \left(g D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta \neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta g D^\gamma u \right) \\ &= g P(D) u + v = gf + v, \end{aligned}$$

onde $v \in \mathcal{E}'(U)$, uma vez que em cada parcela do somatório que define v aparece ao menos uma derivada de g. Além disso, devido ao fato de que as derivadas de g anulam-se em $\overline{B}$, temos que $S(v) \subseteq \overline{B}^c$.

Usando que $gu \in \mathcal{E}'(U)$ e que $P(D)$ possui coeficientes constantes, podemos escrever,

$$gu = \delta * gu = P(D) E * gu = E * P(D)(gu) = (E * gf) + (E * v).$$

Olhando gf como uma função de classe $C^\infty(U)$, então $E * gf \in C^\infty(U)$. Restando mostrar que $E * v \in C^\infty$ numa vizinhança de c pois, com isso e com o fato de g valer um em $\overline{B}$, chegaremos ao resultado.

Tome $\varphi \in C_0^\infty$ tal que $\varphi = 1$ em $\overline{B(0, \varepsilon)}$ e $S(\varphi) = \overline{B(0, 2\varepsilon)}$. Escrevendo,

$$E * v = [(\varphi E) * v] + [(1 - \varphi) E * v],$$

observamos que $(1 - \varphi) E$ é uma função de classe C^∞ pois $(1 - \varphi) \equiv 0$ em $\overline{B(0, \varepsilon)}$ e $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Desta forma, obtemos que $[(1 - \varphi) E * v] \in C^\infty$.

Falta mostrar que $[(\varphi E) * v] \in C^\infty$ em alguma vizinhança de c. Sabemos, por teorema, que

$$S((\varphi E) * v) \subseteq S(\varphi E) + S(v) \subseteq S(\varphi) + S(v) = \overline{B(0, 2\varepsilon)} + S(v).$$

Logo, concluímos que $S((\varphi E) * v) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x \,;\; |x - c| < \varepsilon\}$, isto é, $(\varphi E) * v \equiv 0$ em $B(c, \varepsilon)$. Conseqüentemente, $[(\varphi E) * v] \in C^\infty(B(c, \varepsilon))$. ■

Observações: $i)$ Como a regularidade C^∞ é local, pode-se demonstrar que se o operador $P(D)$ possuir uma solução fundamental que é de classe C^∞ fora de um conjunto discreto, então ele é hipoelíptico.

$ii)$ Baseados no item $i)$ acima, temos que o suporte singular de qualquer solução fundamental do operador $P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c\triangle_x$ deverá conter uma infinidade de pontos não discretos.

Continuando com nosso estudo, considere agora o operador $P(D)$ do teorema anterior e $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ uma solução fundamental de $P(D)$. Se u e f pertencerem a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ forem tais que $P(D)u = f$, então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S(f))$.

Isto pode ser confirmado pelo fato de que $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus S(f)$, o que implica em $P(D)u = 0$ no aberto $\mathbb{R}^n \setminus S(f)$. E agora, basta usar a hipoelipticidade de $P(D)$ para concluir que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S(f))$. Com isto, temos uma quase recíproca (falta existência) do Teorema 3.2.3.

Proposição 3.2.4. *Se $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ for hipoelíptico, então toda solução fundamental de $P(D)$ é C^∞ fora da origem.*

Prova. Seja E uma solução fundamental qualquer do operador $P(D)$, isto é, $P(D) = \delta$. Ora, mas sendo $\delta \in C^\infty$ fora da origem e usando o fato de que $P(D)$ é hipoelíptico, temos

$$E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

como queríamos. ■

Corolário 3.2.5. *Suponha que E e F sejam soluções fundamentais do operador $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, sendo que E é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Então existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $F = E + f$. Em particular, F é C^∞ fora da origem.*

Prova. Como $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, pelo Teorema 3.2.3 sabemos que $P(D)$ é hipoelíptico. Por outro lado, temos que

$$0 = \delta - \delta = P(D)F - P(D)E = P(D)(F - E),$$

e isto nos diz que $P(D)(F-E)=0\in C^{\infty}$ e por hipoelipticidade de $P(D)$,

$$F-E=f\in C^{\infty},$$

como procurávamos. ■

Teorema 3.2.6 (***Solução fundamental*** $\times$ ***hipoelipticidade analítica***). *Considere o operador diferencial com coeficientes constantes* $P(D)=\sum\limits_{|\alpha|\leq m}a_{\alpha}D^{\alpha}$. *Se existir alguma solução fundamental* E *do operador* $P(D)$ *que seja analítica fora da origem, então* $P(D)$ *será hipoelíptico analítico.*

Prova. Ver [24]. ■

Agora, suponha que queiramos obter uma solução fundamental para o operador $P(x,D)=\frac{d}{dx}+a(x)$, onde $a(x)$ é uma função de classe $C^{\infty}(I)$ e I é um intervalo aberto contendo o ponto c. Seja $U:I\longrightarrow I\!R$ uma aplicação satisfazendo de $P(x,D)U=0$. Como sabemos da teoria de EDO, $U\in C^{\infty}(I)$. Tentemos então encontrar uma distribuição K em I de tal modo que $E_c=UK$ seja uma solução de $P(x,D)E_c=\delta_c$. Isto nos leva a,

$$\begin{aligned}
\delta_c &= P(x,D)E_c=\frac{d}{dx}(UK)+a(x)(UK)\\
&= \frac{dU}{dx}K+\frac{dK}{dx}U+a(x)(UK)\\
&= U\frac{dK}{dx}+\left[\frac{dU}{dx}+a(x)\right]K=U\frac{dK}{dx}.
\end{aligned}$$

Portanto, se U não se anular em c, basta-nos resolver

$$\frac{dK}{dx}=(U(c))^{-1}\delta_c.$$

Entretanto, se supusermos que $U(c)=1$, $(U(c))^{-1}\delta_c=\delta_c$, então poderemos tomar $K=H_c$. Generalizando este fato, temos a

Proposição 3.2.7. *Sejam* $a_j:I\longrightarrow\mathbb{C}$, $j=0,1,...,m-1$ *funções de classe* $C^{\infty}(I)$ *e* c *um ponto do intervalo aberto* I. *Consideremos o seguinte operador*

$P(x,D)=\dfrac{d^m}{dx^m}+\sum\limits_{j=0}^{m-1}a_j(x)\dfrac{d^j}{dx^j}$ e $U:I\longrightarrow \mathbb{R}$ a solução do problema

$$\begin{cases} P(x,D)\,U=0, \\ \\ \frac{d^jU}{dx^j}(c)=0,\ \ j=0,1,...,m-2,\ \ e \\ \\ \frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}}(c)=1. \end{cases}$$

Então $E_c=UH_c$ satisfaz $P(x,D)\,E_c=\delta_c$.

Prova. Como sabemos, $U\in C^{\infty}(I)$. Assim, $E_c=UH_c$ é de fato uma distribuição em I. Além disso, das hipóteses obtemos que $\dfrac{d^jU}{dx^j}\delta_c=0,\ j=0,1,2,...,m-2$ e, através de indução, concluímos,

$$\begin{cases} \frac{d^jE_c}{dx^j}=\frac{d^jU}{dx^j}H_c,\ \ j=0,1,...,m-1,\ \ \text{e} \\ \\ \frac{d^mE_c}{dx^m}=\delta_c+\frac{d^mU}{dx^m}H_c. \end{cases}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} P(x,D)\,E_c &= \frac{d^mE_c}{dx^m}+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\frac{d^jE_c}{dx^j} \\ &= \delta_c+\frac{d^mU}{dx^m}H_c+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\frac{d^jU}{dx^j}H_c \\ &= \delta_c+\left(\frac{d^mU}{dx^m}+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\frac{d^jU}{dx^j}\right)H_c=\delta_c, \end{aligned}$$

como procurávamos. ■

Corolário 3.2.8. *Suponha que $a_j\in\mathbb{C}$, $j=0,1,...,m-1$, e que $v\in\mathcal{E}'$. Dado $P(D)=\dfrac{d^m}{dx^m}+\sum\limits_{j=0}^{m-1}a_j\dfrac{d^j}{dx^j}$, então a equação diferencial $P(D)\,u=v$ tem solução.*

Prova. Tomando $c=0$ na proposição anterior, temos que $P(D)\,E=\delta$. Defina agora,

$$u=E*v.$$

Assim,

$$P(D)\,u=P(D)\,(E*v)=P(D)\,E*v=\delta*v=v,$$

finalizando a prova. ■

Observação: Caso $P(x,D)W=0$, podemos concluir, da Proposição 3.2.7, que $E_c = W + UH_c$ também satisfaz $P(x,D)E_c = \delta_c$.

No que segue, escreveremos I_n para representar a matriz identidade de ordem n. Sejam $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $i,j = 1,2,...,n$, funções de classe $C^\infty(I)$, a matriz $A(x) = [a_{ij}(x)]$ e c um ponto do intervalo aberto I. Considerando $U : I \longrightarrow M_n$, onde M_n é o conjunto das matrizes complexas de ordem n e U é solução da equação $P(x,D)U = 0$, e o operador $P(x,D) = \frac{d}{dx}I_n + A(x)$, vemos, como no caso $n=1$, que procurar por uma distribuição E tal que $P(x,D)E = \delta_c I_n$.

Para este fim, tentemos obter uma distribuição K pertencente a $\mathcal{D}'(I)$ de tal modo que $E = UK$. Aplicando regras de derivação,

$$\begin{aligned} P(x,D)E &= \frac{d}{dx}[UK] + A(x)[UK] = \frac{dU}{dx}K + U\frac{dK}{dx} + [A(x)U]K \\ &= \left[\frac{dU}{dx} + A(x)U\right]K + U\frac{dK}{dx} = U\frac{dK}{dx}. \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter que $I_n\frac{dK}{dx} = U^{-1}\delta_c$, desde que U seja uma matriz inversível. Assim, nosso problema estará resolvido se $U(c) = I_n$ e $K = H_c$.

Proposição 3.2.9. *Sejam $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $i,j = 1,2,...,n$, funções de classe $C^\infty(I)$, $A(x) = [a_{ij}(x)]$ e c um ponto do intervalo aberto I. Considere o operador $P(x,D) = \frac{d}{dx}I_n + A(x)$ e $U : I \longrightarrow M_n$ a solução da equação*

$$P(x,D)U = 0 \ \text{com} \ U(c) = I_n.$$

Então $E = UH_c$ satisfaz $P(x,D)E = \delta_c I_n$.

Prova. Como sabemos, $U \in C^\infty(I)$ (no sentido de que cada componente de U é $C^\infty(I)$). Assim, em cada componente, $E = UH_c$ é uma distribuição e, conseqüentemente, vale

$$\begin{aligned} P(x,D)E &= \frac{dE}{dx} + A(x)E = \frac{d(UH_c)}{dx} + A(x)(UH_c) \\ &= \frac{dU}{dx}H_c + U\frac{dH_c}{dx} + (AU)H_c \\ &= H_c\left(\frac{dU}{dx} + AU\right) + U\delta_c = U\delta_c. \end{aligned}$$

Mas,

$$U\delta_c = U\,(c)\,\delta_c = I_n\delta_c,$$

como queríamos. ■

Definição 3.2.10 (***Resolubilidade Global e Local***). *Dados* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω *aberto,* $m \in \mathbb{N}$ *e as funções* $a_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq m$ *e todas de classe* $C^\infty(\Omega)$, *o operador* $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,D^\alpha$ *será dito:*

1) Globalmente resolúvel em Ω *se a equação* $P(x,D)\,u = f$ *tiver solução* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *sempre que* $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

2) Localmente resolúvel em Ω *se dado qualquer ponto* c *de* Ω, *existir um aberto* V_c, *contendo* c, *de modo que a equação* $P(x,D)\,u = f$ *tenha solução* u *pertencente a* $\mathcal{D}'(V_c)$ *sempre que* $f \in C_0^\infty(V_c)$.

Observações: $i)$ Todo operador globalmente resolúvel é localmente resolúvel.

$ii)$ Um exemplo clássico de um operador que não é localmente resolúvel é o operador de Lewy

$$P(x,y,t,D) = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} - 2i\,(x+iy)\,\frac{\partial}{\partial t},$$

pois se $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $f \neq 0$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto, a equação $P(x,y,t,D)\,u = f$ não tem solução uma vez que f deve ser analítica. No entanto, em [28] temos demonstrado o seguinte resultado (que implicará numa contradição com o exposto acima).

Exemplo 3.2.11 (***De Lewy***). *Seja* $f = f(t)$ *uma função real de uma variável real. Se* $u = u(t,x,y)$ *for uma função de classe* C^1 *em alguma vizinhança da origem e* $P(x,y,t,D)\,u = f$ *nesta vizinhança, então* f *é analítica em* $t = 0$.

Afirmação: Sejam g uma função de classe $C^\infty(\Omega)$ e $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,D^\alpha$ um operador localmente resolúvel em Ω. Então, dado qualquer ponto c de Ω, existe uma bola aberta $B(c,r)$, com $r > 0$, e $u \in \mathcal{D}'(B(c,r))$ tal que $P(x,D)\,u = g$ em $B(c,r)$.

Solução. De fato, seja $V_c \subseteq \Omega$ um conjunto aberto de tal modo que a equação $P(x,D)\,u = f$ possua solução para toda $f \in C_0^\infty(V_c)$. Tomemos $r > 0$ de forma que $\overline{B(c,r)} \subset V_c$.

Agora escolha $\varphi \in C_0^\infty(V_c)$ tal que $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de $\overline{B(c,r)}$. A equação $P(x,D)\,u = \varphi g$ tem solução u em $\mathcal{D}'(B(c,r))$ devido ao fato de que φg está em $C_0^\infty(V_c)$. Mas, como $\varphi g = g$ em $B(c,r)$, vemos que $P(x,D)\,u = g$ em $B(c,r)$, finalizando a prova. ■

Teorema 3.2.12. *Todo operador diferencial $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, com coeficientes constantes, possui, ao menos, uma solução fundamental.*

Prova. Ver [24]. ■

Corolário 3.2.13. *Seja $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$. Então, dada qualquer $f \in \mathcal{E}'$, a equação diferencial $P(D)\,u = f$ tem uma solução dada por $u = E * f$, onde $P(D)\,E = \delta$.*

Prova. Tome $E \in \mathcal{D}'$ uma solução fundamental de $P(D)$. Como $f \in \mathcal{E}'$, então, definindo $u = E * f$, temos que $u \in \mathcal{D}'$. Logo

$$P(D)\,u = P(D)(E * f) = (P(D)\,E) * f = \delta * f = f,$$

concluindo o resultado. ■

Corolário 3.2.14. *Qualquer que seja o operador $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, com coeficientes constantes, ele é globalmente resolúvel.*

Prova. Seja $f \in C_0^\infty$ uma função qualquer. Logo, a distribuição gerada por f tem suporte compacto e, por isso e pelo corolário anterior, $u = E * f \in \mathcal{D}'$ é solução de $P(D)\,u = f$. ■

3.3 Solução Fundamental para EDP Clássica

A seguir, vejamos a idéia de solução fundamental aplicada a algumas EDP´s clássicas. Destaque especial será dado ao laplaciano na próxima seção.

Teorema 3.3.1. *O operador de Cauchy-Riemann,* $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right]$, *é hipoelíptico.*

Prova. Inicialmente, comecemos com um trabalho de investigação. Admita que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ possua uma solução fundamental E temperada em y. Aplicando transformada parcial de Fourier em relação a y, obtemos

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial x} - \xi \widetilde{E}\right] = \delta(x).$$

Forçando para que $\widetilde{E}(x,\xi)$ seja temperada na variável ξ (e portanto E temperada em y) e pela teoria desenvolvida para resolver este tipo de equação, encontramos

$$\widetilde{E}(x,\xi) = 2\left[H(x) + C(\xi)\right]e^{\xi x}.$$

Note que $\frac{\partial\left(C(\xi)e^{\xi x}\right)}{\partial \overline{z}} = 0$ e atente para a observação que segue o Corolário 3.2.8. Ora, como queremos que $\widetilde{E}$ seja temperada na variável ξ, então devemos impor que

$$H(x) + C(\xi) = 0 \text{ sempre que } \xi x > 0.$$

Olhando para o caso $\xi > 0$, $x > 0$ e para o caso $\xi < 0$, $x < 0$, concluímos, sem grande dificuldade, que

$$C(\xi) = -H(\xi).$$

Por esta razão, escrevemos

$$\widetilde{E}(x,\xi) = 2\left[H(x) - H(\xi)\right]e^{\xi x},$$

isto é,

$$\widetilde{E}(x,\xi) = \begin{cases} 2H(x)e^{\xi x}, \text{ caso } \xi < 0 \text{ e} \\ 2\left[H(x) - 1\right]e^{\xi x}, \text{ se } \xi > 0. \end{cases}$$

Usando a fórmula para determinar a transformada inversa,

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y}\widetilde{E}(x,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(x+iy)\xi}2H(x)\,d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{(x+iy)\xi}2\left[H(x)-1\right]d\xi\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[H(x)\int_{-\infty}^{0} e^{(x+iy)\xi}d\xi + \left[H(x)-1\right]\int_{0}^{\infty} e^{(x+iy)\xi}d\xi\right] \\ &= \frac{1}{\pi z}, \end{aligned}$$

onde $z = x + iy$, claro.

Note agora que $E(x,y) \in C^{\infty}$ fora da origem e, portanto, o operador de Cauchy-Riemann é hipoelíptico. ■

Nota: De fato, o operador de Cauchy-Riemann é hipoelíptico analítico.

Corolário 3.3.2. *Qualquer que seja a solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann, ela será da forma* $\frac{1}{\pi z} + U(z)$, *onde* U *é uma função analítica.*

Prova. Seja E uma solução fundamental qualquer do operador de Cauchy-Riemann. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(E - \frac{1}{\pi z}\right) = \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta - \delta = 0.$$

Portanto, sendo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ hipoelíptico analítico, temos que $E - \frac{1}{\pi z} = U(z)$ analítica, como queríamos. ■

Teorema 3.3.3. *Tomemos* u *uma função contínua no aberto* Ω. *Se* u *for analítica no conjunto* $\{(x,y) \in \Omega;\ y \neq 0\}$, *então* u *é analítica em* Ω.

Prova. Caso $\{(x,y) \in \Omega;\ y = 0\} = \emptyset$, então $A = \Omega$ e nada mais a se fazer. Suponha então que $A \neq \Omega$. Seja $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ uma função qualquer, porém fixa. Provaremos que $< \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \varphi > = 0$. Temos que,

$$< \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \varphi > \;= - < u, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} > \;= -\int\int u \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dxdy.$$

Estenda $u\varphi$ em $\mathbb{R}^2$ por zero em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$. Como u é contínua, então

$$-\int\int u \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dxdy = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\int_{|y|>\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dydx.$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} -\int\int_{|y|>\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dydx &= \frac{1}{2}\int\int_{|y|>\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dydx + \frac{i}{2}\int\int_{|y|>\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial y} dydx \\ &= \frac{1}{2}\int_{|y|>\varepsilon}\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy + \frac{i}{2}\int\int_{|y|>\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial y} dydx. \end{aligned}$$

Mas, sendo $u\varphi$ de suporte compacto e usando integração por partes,

$$\begin{aligned}\int_{|y|>\varepsilon}\left[\int u\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\right]dy &= \int_{|y|>\varepsilon}\left\{\left[(u\varphi)(x,y)\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}-\int\frac{\partial u}{\partial x}\varphi dx\right\}dy\\ &= -\int_{|y|>\varepsilon}\int\frac{\partial u}{\partial x}\varphi dxdy.\end{aligned}$$

Além disso, também temos que

$$\begin{aligned}\int\int_{|y|>\varepsilon}u\frac{\partial\varphi}{\partial y}dydx &= \int\left\{\left[(u\varphi)(x,y)\right]_{y=-\infty}^{y=-\varepsilon}+(u\varphi)]_{y=\varepsilon}^{y=\infty}-\int\frac{\partial u}{\partial y}\varphi dy\right\}dx\\ &= \int\left[(u\varphi)(x,-\varepsilon)-(u\varphi)(x,\varepsilon)\right]dx-\int\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\varphi dydx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int\int_{|y|>\varepsilon}u\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}dydx &= \frac{1}{2}\int_{|y|>\varepsilon}\int u\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy+\frac{i}{2}\int\int_{|y|>\varepsilon}u\frac{\partial\varphi}{\partial y}dydx\\ &= -\int\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}\varphi dydx+\int\frac{(u\varphi)(x,\varepsilon)-(u\varphi)(x,-\varepsilon)}{2i}dx\\ &= \int\frac{\left[(u\varphi)(x,\varepsilon)-(u\varphi)(x,-\varepsilon)\right]}{2i}dx,\end{aligned}$$

pois $\dfrac{\partial u}{\partial\overline{z}}=0$ em $\{(x,y)\in\Omega;\ y\neq 0\}$ (satisfaz as equações de Cauchy-Riemann). Além disso, sendo $u\varphi$ com suporte compacto e contínua, então $u\varphi$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^2$. Ademais, como $\left[(u\varphi)(x,\varepsilon)-(u\varphi)(x,-\varepsilon)\right]\rightarrow 0$ quando $\varepsilon\rightarrow 0^+$, então

$$<\frac{\partial u}{\partial\overline{z}},\varphi>=0,$$

finalizando a prova. ■

Corolário 3.3.4 (***Princípio da Reflexão de Scharwz***). *Seja $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, Ω aberto e simétrico em relação ao eixo x. Se a função $u=u(z)$ for contínua em $\Omega\cap\{y\geq 0\}$, real em $\Omega\cap\{y=0\}$ e analítica em $\Omega\cap\{y>0\}$, então existe uma função $U=U(z)$, analítica em Ω, de modo que $U=u$ em $\Omega\cap\{y\geq 0\}$.*

Prova. Defina

$$U(x,y)=\begin{cases}u(x,y), & \text{se } y\geq 0\\ \overline{u(x,-y)}, & \text{caso } y<0.\end{cases}$$

Vemos que U é contínua e mais, que é analítica em $\{(x,y)\in\Omega;\ y\neq 0\}$. Logo, U satisfaz as condições do teorema anterior e, portanto, é analítica em Ω, finalizando a prova. ■

TEOREMA 3.3.5. *O operador do calor,* $P(t,x,D) = \dfrac{\partial}{\partial t} - \triangle_x$, *é hipoelíptico.*

PROVA. Seja E uma solução fundamental para este operador. Supondo adicionalmente que E seja temperada na variável x. Aplicando a transformada parcial de Fourier obtemos

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \delta(t).$$

Se quisermos que $\widetilde{E}$ seja temperada na variável ξ (e conseqüentemente E na variável x), então

$$\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)\, e^{-|\xi|^2 t}.$$

Aplicando a fórmula de inversão temos

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}.H(t).e^{-|\xi|^2 t} d\xi \\ &= H(t)\prod_{j=i}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\xi_j}e^{-\left|\xi_j\right|^2 t}d\xi_j\right). \end{aligned}$$

Mas, como sabemos, a transformada de Fourier da função $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in I\!R$, é a função $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{1/2}\, e^{-|\xi|^2/2}$. Conseqüentemente, efetuando a mudança de variável $\xi_j = s_j/\sqrt{2t}$ obtemos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\xi_j}e^{-t\left|\xi_j\right|^2}d\xi_j &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\left(s_j/\sqrt{2t}\right)}e^{-|s_j|^2/2}ds_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\left(-x_j/\sqrt{2t}\right)s_j}e^{-|s_j|^2/2}ds_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\frac{1}{2\pi}\widehat{\psi}\left(-x_j/\sqrt{2t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-|x_j|^2/4t}. \end{aligned}$$

Assim,

$$E(t,x) = H(t).\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-|x_j|^2/4t}\right) = H(t).\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-|x|^2/4t}.$$

Ora, claramente $E \in C^\infty$ para $t > 0$. No entanto, definindo E por zero para $t \leq 0$ obtemos que, nos pontos da forma $(0,c)$, com $c \neq 0$, E e todas as suas derivadas anulam-se quando $t \to 0^+$. Assim, temos que E é C^∞ fora da origem e por conseqüência, $P(t,x,D)$ é hipoelíptico. ∎

A fim de ilustrarmos ainda mais a técnica, obteremos solução fundamental para o operador de onda e veremos que ele não é hipoelíptico (como já sabíamos do Exemplo 3.1.6).

Proposição 3.3.6. *O operador de onda, $P(t,x,D) = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle_x$, não é hipoelíptico.*

Prova. Seja E uma solução fundamental de $P(t,x,D)$ e admita que E seja temperada em x. Aplicando a transformada parcial de Fourier, tem-se que,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial t^2} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \delta(t). \tag{3.1}$$

Sem a menor dificuldade, temos que uma solução do problema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + |\xi|^2 U = 0, \\ U(0,\xi) = 0 \text{ e} \\ U'(0,\xi) = 1 \end{cases}$$

é dada por $U(t,\xi) = \dfrac{sen\,(t|\xi|)}{|\xi|}$, para $|\xi| \neq 0$. Conseqüentemente, uma solução de (3.1), possuindo suporte em $t \geq 0$, é

$$\widetilde{E}_+(t,\xi) = H(t)\frac{sen\,(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Analogamente, e com cálculos simples, temos que uma outra solução de (3.1), com suporte em $t \leq 0$, é

$$\widetilde{E}_-(t,\xi) = -H(-t)\frac{sen\,(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Ora, $\widetilde{E}_\pm$ são distribuições temperadas na variável ξ, porém não podemos usar a fórmula de inversão pois $\widetilde{E}_\pm \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Em situações como esta, o que normalmente se faz é introduzir um fator de convergência que dependa de ε e então analisa-se a situação quando $\varepsilon \to 0$. Um fator de convergência conveniente neste caso é a função $g(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}$. Neste caso escreva,

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon\pm}(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int e^{ix.\xi} e^{-\varepsilon|\xi|} \widetilde{E}_\pm(t,\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} H_\pm(t) \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int e^{ix.\xi} e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{sen\,(t|\xi|)}{|\xi|} d\xi, \end{aligned}$$

onde, naturalmente, $H_+(t) = H(t)$ e $H_-(t) = -H(-t)$.

Não faremos o restante dos cálculos aqui, no entanto observamos que nos casos $n = 1, 2, 3$ chega-se a

$$E_+(t,x) = H(t-x)\,H(t+x)\,, \text{ para } n = 1,$$
$$E_+(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(t^2 - \|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ se } \|x\| < t \text{ e} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases},$$
$$E_+(t,x) = \tfrac{1}{4\pi\|x\|}\delta(t - \|x\|)\,, \text{ para } n = 3.$$

Assim, segue dos três itens acima que, nos casos $n = 1, 2, 3$, o operador de onda não é hipoelíptico. O caso geral é demonstrado a partir da expressão para $E_{\varepsilon\pm}(t,x)$ posta acima. ∎

Observação: Pode-se demonstrar que, seja qual for n natural, verifica-se

$$S(E_+) \subset \{t \geq 0; \|x\| \leq t\} \text{ e } S(E_-) \subset \{t \leq 0; \|x\| \leq t\}\,.$$

Teorema 3.3.7. *O operador de Schrödinger, $P(t,x,D) = \dfrac{\partial}{i\partial t} - \triangle_x$, não é hipoelíptico.*

Prova. Vamos admitir que seja possível encontrar uma distribuição E, temperada em x, que seja uma solução fundamental para o operador $P(t,x,D)$. Se for o caso, aplicando transformada parcial de Fourier em x, encontramos

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{i\partial t} + |\xi|^2\,\widetilde{E} = \delta(t)\,.$$

Seguindo agora na mesma linha de antes e resolvendo a equação diferencial, obtemos,

$$\widetilde{E}(t,\xi) = iH(t)\,e^{-it|\xi|^2},$$

de maneira que $\widetilde{E}$ é temperada na variável ξ e, por conseguinte, E é temperada na variável x. Contudo, $\widetilde{E}$ não é uma função de L^1 na variável ξ. Desta forma, também introduzimos um fator de convergência. Podemos definir, para $\varepsilon > 0$,

$$\widetilde{E}_\varepsilon(t,\xi) = iH(t)\,e^{-(\varepsilon+it)|\xi|^2}.$$

Assim, usando a fórmula de inversão, concluímos que

$$E(t,x) = \frac{iH(t)}{(2\pi)^n}\int e^{ix.\xi}e^{-(\varepsilon+it)|\xi|^2}d\xi = iH(t)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\xi_j}e^{-(\varepsilon+it)\xi_j^2}d\xi_j.$$

Seguindo o método usado para o operador de calor, juntamente com a mudança de variável $\xi_j = s_j/\sqrt{2(\varepsilon+it)}$, chegamos, para $t>0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j\xi_j}e^{-(\varepsilon+it)\xi_j}d\xi_j &= \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon+it)}}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix_j.\left[s_j/\sqrt{2(\varepsilon+it)}\right]}e^{\frac{-s_j^2}{2}}ds_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon+it)}}\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\left[-x_j/\sqrt{2(\varepsilon+it)}\right]s_j}e^{\frac{-s_j^2}{2}}ds_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon+it)}}\frac{1}{2\pi}(2\pi)^{1/2}e^{-\left[x_j/\sqrt{2(\varepsilon+it)}\right]^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varepsilon+it)}}e^{-x_j^2/4(\varepsilon+it)}.
\end{aligned}$$

Fazendo ε tender a zero,

$$E(t,x) = \frac{iH(t)}{\left(2\sqrt{i\pi t}\right)^n}e^{-|x|^2/4it} = \frac{H(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{n-2}{4}\pi i}e^{-|x|^2/4it}.$$

Observe que, pela forma da distribuição E obtida, ela não é contínua em nenhum ponto do tipo $(0,c)$, conseqüentemente fica demonstrado o teorema. ∎

3.4 Estudo do Laplaciano

Procuraremos agora obter uma solução fundamental para o operador Laplaciano, isto é, procuraremos por uma distribuição E satisfazendo

$$\triangle E = \delta.$$

Uma técnica para abordar problemas desta natureza consiste em procurar soluções radiais, ou seja, que dependam apenas de $r = |x|$.

Busquemos então por uma função f, definida em $[0,\infty)$, de modo que E seja temperada em x e que $E(x) = f(|x|)$. Para isto, vejamos o resultado seguinte, que relacionará o laplaciano de E com f.

Proposição 3.4.1. *Seja f uma função de classe C^2 definida em $[0,\infty)$. Então, $E(x) = f(|x|)$, $r = |x|$, $x \in I\!R^n$, é tal que*

$$\triangle E(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r), \text{ para } r \neq 0.$$

Prova. Inicialmente note que, para $r \neq 0$,

$$\frac{\partial E}{\partial x_j}(x) = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r)\frac{x_j}{r},$$

e, derivando,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f'(r)\frac{x_j}{r}\right) = f''(r)\left(\frac{x_j}{r}\right)^2 + f'(r)\left(\frac{r - x_j^2/r}{r^2}\right).$$

Deste modo, basta substituir em $\triangle E(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}$, e, facilmente, encontra-se a igualdade procurada. ■

Como nosso objetivo é resolver $\triangle E = \delta$, vemos que $\triangle E = 0$ fora da origem (pois δ é!). Assim, como estamos trabalhando fora da origem ($r \neq 0$) e usando a proposição acima, temos que resolver a equação diferencial

$$f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) = 0, \text{ com } 0 < r < \infty.$$

Não entraremos em detalhes aqui (sugestão: Faça $y = f'(r)$ na equação acima), soluções para esta EDO são dadas por

$$f(r) = \begin{cases} ar^{2-n} + b, \text{ caso } n \geq 3 \text{ e} \\ a\,ln\; r + b, \text{ se } n = 2, \end{cases} \tag{3.2}$$

com a e b constantes arbitrárias. Note que, com isso, obtemos $E(x) = f(r)$ (pertence a $L^1_{loc}(I\!R^n)$) e, por conseguinte, define uma distribuição. A seguir veremos que, com uma escolha conveniente das constantes a e b, a distribuição gerada por E será de fato uma solução fundamental para o operador laplaciano.

Neste momento, lembramos que, para funções φ e ψ, de no mínimo classe C^2, vale a importante identidade

$$\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi = div(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi),$$

onde div nada mais é que o operador divergência.

Voltando à busca central, como $E(x) = f(r)$ é C^∞ fora da origem e tomando $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^n)$ uma função qualquer, então

$$< E, \varphi > \; = \int E(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} E(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Como estamos querendo que E seja solução fundamental do laplaciano, então devemos verificar a igualdade

$$< \triangle E, \varphi > \;=\; < E, \triangle \varphi > \;= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} E(x) \triangle \varphi(x)\, dx = \varphi(0), \; \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Seja, portanto, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função arbitrária, porém fixa. Tome $R > 0$ de modo que $S(\varphi) \subset \overline{B(0,R)}$. Como $\triangle E = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então

$$E \triangle \varphi - \varphi \triangle E = E \triangle \varphi = div(E \nabla \varphi - \varphi \nabla E), \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Denotando $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \varepsilon \leq |x| \leq R\}$ e usando o Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} E \triangle \varphi dx &= \int_{B_\varepsilon} E \triangle \varphi dx = \int_{B_\varepsilon} div(E \nabla \varphi - \varphi \nabla E)\, dx \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS &= \int_{|x| = \varepsilon} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS + \int_{|x| = R} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS \\ &= \int_{|x| = \varepsilon} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS, \end{aligned}$$

pois a segunda integral é nula. Logo,

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} E \triangle \varphi dx = \int_{|x| = \varepsilon} (E \nabla \varphi - \varphi \nabla E) . \overrightarrow{n}\, dS.$$

Denotando por $\widetilde{x}$ a variável na esfera unitária $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x| = 1\}$ e $d\widetilde{S}$ o elemento de área nesta esfera, então $dS = \varepsilon^{n-1} d\widetilde{S}$. Assim, podemos escrever

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} E \triangle \varphi dx = \int_{S^{n-1}} \left[-f(\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial \overrightarrow{n}} (\varepsilon \widetilde{x}) + f'(\varepsilon) \varphi(\varepsilon \widetilde{x}) \right] \varepsilon^{n-1} d\widetilde{S},$$

pois $\frac{\partial \varphi}{\partial \overrightarrow{n}} = \nabla \varphi . \overrightarrow{n}$, $\nabla E = -f'(r) \overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{n} = -\widetilde{x}$. No entanto, de (3.2), escolhendo $b = 0$, vemos que, quando $\varepsilon \to 0^+$,

$$\begin{cases} f(\varepsilon) \varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0 \\ f'(\varepsilon) \varphi(\varepsilon \widetilde{x}) \varepsilon^{n-1} \longrightarrow \begin{cases} a(2-n) \varphi(0), \text{ para } n \geq 3 \\ a \varphi(0), \text{ se } n = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Sendo estas conclusões independentes do $\widetilde{x}$ escolhido, temos convergência uniforme em S^{n-1}. Agora, usando (3.3) e trocando φ por $\triangle\varphi$,

$$< E, \triangle\varphi > \quad = \quad \begin{cases} a\,(2-n)\,\varphi\,(0) \int_{S^{n-1}} d\widetilde{S}, \text{ caso } n \geq 3, \\ a\varphi\,(0) \int_{S^{n-1}} d\widetilde{S} = 2\pi a\varphi\,(0)\,, \text{ se } n = 2. \end{cases}$$

Para resultar em $\varphi\,(0)$ apenas (como queremos!), escolhemos

$$\begin{cases} a = \frac{1}{(2-n)\int_{S^{n-1}} d\widetilde{S}}, \text{ caso } n \geq 3 \\ a = \frac{1}{2\pi}\, ln\, |x|\,, \text{ para } n = 2, \end{cases}$$

e isto mostra o

Teorema 3.4.2 (***Lema de Weyl***). *O operador de Laplace é hipoelíptico.*

Corolário 3.4.3. *Seja F uma solução fundamental do operador laplaciano. Então existe uma função analítica, U, em $I\!R^n$, de modo que $F = E + U$, onde E é proveniente do Teorema* 3.4.2.

Prova. Considere $U = F - E$. Então $\triangle U = 0$. Como o operador de Laplace é hipoelíptico analítico e a função nula é analítica, então U é analítica. Conseqüentemente, $F = E + U$, como desejávamos. ■

Capítulo 4

ESTIMATIVAS A-PRIORI E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

4.1 Problema de Dirichlet: Método das Funções Subharmônicas

Trataremos aqui de resolver problemas de Dirichlet. Os teoremas iniciais serão úteis apenas para justificar provas posteriores e, por esta razão, algumas demonstrações serão omitidas.

Teorema 4.1.1. *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *satisfazendo* $\triangle u = 0\,(\geq 0, \leq 0)$ *em* Ω. *Então, para qualquer bola* $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$, *vale*

1) $u(y) = (\leq, \geq)\, \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u ds,$

2) $u(y) = (\leq, \geq)\, \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n}} \int_{B_\varepsilon(y)} u dx$

Prova. Para uma demonstração, ver [11]. ■

Observação: É interessante notar que se $u \equiv 1$ (harmônica portanto), temos, do item 1) acima que

$$\frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} 1 ds = 1.$$

Logo, $\int_{\partial B_\varepsilon(y)} 1 ds = n\omega_n \varepsilon^{n-1}$. Fazendo $\varepsilon \to 1$ concluímos

$$\int_{S^{n-1}} ds = n\omega_n$$

Teorema 4.1.2 (***Princípio do Máximo***). *Seja $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ em Ω e suponha que exista um ponto $y \in \Omega$ para o qual $u(y) = \sup_{\Omega} u$ $(\inf_{\Omega} u)$. Então u é constante. Conseqüentemente, uma função harmônica não pode assumir máximo ou mínimo em ponto interior.*

Prova. Ver [11]. ■

Teorema 4.1.3. *Seja $B = B_R(0)$ e φ uma função contínua na $\partial\Omega$. Então a função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} ds_y \text{ para } x \in B \\ \varphi(x) \text{ se } x \in \partial B, \end{cases}$$

pertence a $C^2(B) \cap C^0\left(\overline{B}\right)$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em B.

Prova. Para uma prova, ver [11]. ■

Teorema 4.1.4. *Qualquer seqüência limitada de funções harmônicas num domínio Ω contém uma subseqüência convergindo uniformemente em subdomínios compactos de Ω para uma função harmônica em Ω.*

Prova. Ver [11]. ■

Seja Ω um domínio para o qual valha o Teorema da Divergência e u e v pertencentes a $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$. Pondo $w = v\nabla u$ no Teorema da Divergência, obtemos a *primeira identidade de Green*

$$\int_{\Omega} v \triangle u dx + \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds.$$

Trocando u e v na fórmula acima e subtraindo uma da outra, obtemos a *segunda fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} (v \triangle u - u \triangle v) dx = \int_{\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds.$$

Prosseguindo, seja $y \in \Omega$ fixo e considere a solução fundamental normalizada para o operador de Laplace,

$$E(x-y) = E(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{-n} & \text{se } n > 2 \\ \frac{1}{4\pi} ln\, |x-y| & \text{para } n = 2. \end{cases}$$

Sem grandes dificuldades obtemos,

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{n\omega_n} (x_i - y_i) |x-y|^{-n} & \text{caso } n > 2 \\ \frac{1}{4\pi} (x_i - y_i) |x-y|^{-2} & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

De modo que, em qualquer caso,

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial x_i} = \frac{1}{n\omega_n} (x_i - y_i) |x-y|^{-n}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 E(x-y)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{n\omega_n} \left\{ |x-y|^2 - n(x_i - y_i)^2 \right\} |x-y|^{-n-2}.$$

Note que, daqui, tiramos facilmente $\triangle E = 0$ para $x \neq y$ (como já sabíamos!).

A singularidade em $x = y$ nos impossibilita de usarmos diretamente E no lugar de v na segunda identidade de Green. Para transpor esta dificuldade, trocamos Ω por $\Omega - B_\varepsilon(y)$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $B_\varepsilon(y) \subset\subset \Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega - B_\varepsilon(y)} E \triangle u - u \triangle E dx = \int_{\partial(\Omega - B_\varepsilon(y))} \left(E \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) ds$$

e, daí,

$$\int_{\Omega - B_\varepsilon(y)} E \triangle u dx = \int_{\partial \Omega} \left(E \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(E \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) ds. \quad (4.1)$$

Agora, olhando apenas para a última integral, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \right| &= \left| E(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \right| \leq |E(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| ds \\ &\leq |E(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} |\nabla u| ds \leq |E(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} ds \\ &= n\omega_n \varepsilon^{n-1} |E(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u|. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$,

$$n\omega_n \varepsilon^{n-1} |E(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u| \to 0.$$

Além disso, de

$$\frac{\partial E\left(x-y\right)}{\partial\eta}=\nabla E\left(x-y\right).\eta=-\frac{1}{n\omega_n}\frac{\left|x-y\right|^{-n+2}}{\varepsilon},$$

e, pelo Teorema 4.1.1,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}u\frac{\partial E}{\partial\eta}ds &= -\frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}u\left|x-y\right|^{-n+2}ds\\ &= -\frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}u\varepsilon^{-n+2}ds\\ &= -\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}uds=-u\left(y\right).\end{aligned}$$

Voltando a (4.1) e fazendo $\varepsilon\to 0^+$ concluímos que

$$u\left(y\right)=\int_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial E}{\partial\eta}\right)ds+\int_\Omega E\triangle udx, \tag{4.2}$$

que é chamada de *fórmula de representação de Green.*

Definição 4.1.5 (***Potencial Newtoniano com densidade*** f). *Para uma função integrável e limitada f, a integral*

$$\int_\Omega E\left(x-y\right)f\left(x\right)dx$$

é chamada de potencial newtoniano com densidade f.

Note que, caso u possua suporte compacto em Ω, então (4.2) resultará em

$$u\left(y\right)=\int_\Omega E\triangle udx.$$

E quando u for harmônica em Ω, temos a seguinte representação mais simplificada

$$u\left(y\right)=\int_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial E}{\partial\eta}\right)ds,\ \text{com } y\in\Omega.$$

Agora, suponha que $h\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2\left(\Omega\right)$ satisfaça $\triangle h=0$ em Ω. Usando então a segunda identidade de Green, obtemos,

$$\int_\Omega h\Delta u-u\Delta hdx=\int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)ds,$$

isto é,

$$\int_\Omega h\Delta udx=-\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial\eta}-h\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)ds. \tag{4.3}$$

Escrevendo $G = E + h$ e juntando (4.2) com (4.3), chegamos a uma versão mais geral da fórmula de representação de Green,

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \eta} - G\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} G\Delta u dx.$$

Agora, se tivermos também que $G = 0$ na $\partial\Omega$ então

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \eta} ds + \int_{\Omega} G\Delta u dx.$$

A função G é chamada de *função de Green* para o domínio Ω.

Definição 4.1.6 (***Subharmônica e Superharmônica***). *Uma função u pertencente a $C^0(\Omega)$ será dita*

1) Subharmônica *em Ω se para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e toda função h harmônica em B, satisfazendo $u \leq h$ em ∂B, tivermos também que $u \leq h$ em B.*

2) Superharmônica *em Ω se para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e toda função h harmônica em B, que satisfaça $u \geq h$ em ∂B, também concluirmos que $u \geq h$ em B.*

Propriedades das funções Subharmônicas e Superharmônicas:

i) Se u for subharmônica num domínio Ω, ela satisfará o princípio do máximo em Ω (Teorema 4.1.2). Além disso, caso v seja superharmônica em um domínio limitado Ω, com $v \geq u$ na $\partial\Omega$, então ou $v > u$ em Ω ou $v \equiv u$ em Ω.

ii) Seja u subharmônica em Ω e $B \subset\subset \Omega$. Denote por $\overline{u}$ a função harmônica em B obtida a partir do Teorema 4.1.3, com $u = \varphi$. Definimos em Ω a função

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x) & \text{para } x \in B \\ u(x) & \text{se } x \in \Omega \backslash B \end{cases}$$

Esta função U é subharmônica em Ω (em particular, harmônica em B).

iii) Sejam $u_1, u_2, ..., u_k$ funções subharmônicas em Ω. A aplicação definida em Ω, $u(x) = max\{u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)\}$, é subharmônica (em Ω, claro).

Resultados correspondentes podem ser obtidos para funções superharmônicas, trocando-se u por $-u$ nas propriedades $i)$, $ii)$ e $iii)$ acima. Para sugestões e provas das propriedades acima, veja [11].

DEFINIÇÃO 4.1.7 (***Subfunção e Superfunção relativas a*** φ). *Seja* Ω *um domínio limitado e* φ *uma função limitada na* $\partial\Omega$. *Uma função* u, *subharmônica em* Ω, *será dita uma subfunção relativa a* φ *se* $u \leq \varphi$ *na* $\partial\Omega$. *Designaremos por* S_φ *o conjunto das subfunções relativas a* φ.

Similarmente, uma função v *superharmônica em* Ω *será dita uma superfunção relativa a* φ *se* $v \geq \varphi$ *na* $\partial\Omega$.

OBSERVAÇÃO: Através do uso do princípio do máximo mostra-se que toda subfunção relativa a φ é menor do que ou igual a toda superfunção relativa φ.

TEOREMA 4.1.8 (***De Perron***). *Seja* Ω *um domínio limitado e* φ *uma função limitada na* $\partial\Omega$. *Então a função* $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ *é harmônica em* Ω.

PROVA. Seja $v \in S_\varphi$ uma função qualquer. Como v é subharmônica em Ω, então, pela propriedade $i)$, temos que v satisfaz o princípio do máximo. Digamos que $p \in \partial\Omega$ seja o ponto de máximo de v, isto é, $v(x) \leq v(p)\,, \forall x \in \overline{\Omega}$. Por outro lado, sendo v subfunção relativa à φ, então $v(x) \leq \varphi(x)\,, \forall x \in \partial\Omega$. Em particular, $v(p) \leq \varphi(p)\,,$ e, portanto, podemos concluir que

$$v(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) = M, \ \forall x \in \Omega.$$

Mas, isto nos diz que $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$, logo u está bem definida.

Agora, procuremos mostrar que u é harmônica em Ω. Seja $y \in \Omega$ um elemento arbitrário, porém fixo. Como u é definido por supremo, então existe uma seqüência $(v_n) \subset S_\varphi$ tal que, quando $n \to \infty$,

$$v_n(y) \to \sup_{v \in S_\varphi} v(y) = u(y)\,.$$

Trocando, se necessário, v_n por $max\left\{v_n, \inf_{x \in \partial\Omega} \varphi(x)\right\}$ podemos supor que a seqüência (v_n) é limitada. Escolha $R > 0$ de modo que $B_R(y) \subset\subset \Omega$ e defina

$$V_n(x) = \begin{cases} \bar{v}_n(x) & \text{se } x \in B_R(y) \\ v_n(x) & \text{caso } x \in (\Omega \backslash B_R(y))\,, \end{cases}$$

como na propriedade $ii)$ acima. Temos que $V_n \in S_\varphi$, pois V_n é subharmônica em Ω e, para $x \in \partial\Omega$, $V_n(x) = v_n(x) \leq \varphi(x)$. Além disso, também concluímos que $V_n(y) \to u(y)$ quando $n \to \infty$, uma vez que, pelo Teorema 4.1.3, temos

$$V_n(y) = \frac{R^2 - |y-y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(y)} \frac{u(z)}{|y-z|^n} ds_z = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(z)\, ds_z = u(y).$$

Além disso, temos que a seqüência (V_n) é limitada e V_n é harmônica em $B_R(y)$, $\forall n \in I\!N$. Aplicando então o Teorema 4.1.4 temos que a seqüência (V_n) contém uma subseqüência (V_{n_k}) que converge uniformemente em $B_\varepsilon(y)$ $(\forall \varepsilon < R)$ para uma função harmônica em $B_R(y)$, que chamaremos de $\tilde{v}$.

De $V_{n_k}(x) \leq \sup_{v \in S_\varphi} v(x) = u(x)$, fazendo $k \to \infty$, chegamos a $\tilde{v} \leq u$ em $B_R(y)$. Ademais, como $V_n(y) \to u(y)$ e $V_{n_k}(y) \to \tilde{v}(y)$, então $\tilde{v}(y) = u(y)$.

Afirmamos, agora, que $\tilde{v} \equiv u$ em $B_R(y)$. Provemos. Suponha, por absurdo, que $\tilde{v}(z) < u(z)$ para algum $z \in B_R(y)$. Novamente usando o fato de que u foi definida por supremo, temos que existe $\tilde{u} \in S_\varphi$ tal que

$$\tilde{v}(z) < \tilde{u}(z) \leq u(z).$$

Definindo agora $w_k(x) = max\{\tilde{u}(x), v_{n_k}(x)\}$ e também,

$$W_k(x) = \begin{cases} \overline{w}_k(x) \text{ caso } x \in B_R(y) \\ w_k(x) \text{ se } x \in (\Omega \backslash B_R(y)), \end{cases}$$

temos, como antes, que $W_k \in S_\varphi$, $W_k(y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(y)$ e que (W_k) possui uma subseqüência que converge uniformemente em $B_\varepsilon(y)$ $(\forall \varepsilon < R)$, para uma função ω, harmônica em $B_R(y)$. Sendo que, chegamos também a $\tilde{v} \leq w \leq u$ em $B_R(y)$ e $\tilde{v}(y) = w(y) = u(y)$. Mas então, pelo princípio do máximo, concluímos que $\tilde{v} = w$ em $B_R(y)$. Absurdo, logo $u = \tilde{v}$ em $B_R(y)$, isto é, u é harmônica em $B_R(y)$ pois $\tilde{v}$ é, finalizando a prova. ■

Nota: A função $u(.) = \sup_{v \in S_\varphi} v(.)$, do teorema acima é chamada de *função de Perron*.

Definição 4.1.9 (***Função Barreira***). *Sejam $\xi \in \partial\Omega$ e w uma função de $C^0(\overline{\Omega})$. w será dita uma função barreira em ξ se*

1) *w for superharmônica em Ω;*

2) *$w(x) > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ e $w(\xi) = 0$.*

Nota: Uma importante característica do conceito de função barreira é que ele é uma propriedade local da fronteira de Ω. Em termos mais precisos, queremos dizer que uma função w é uma barreira local em $\xi \in \partial\Omega$ se existe uma vizinhança V_ξ tal que w satisfaz a definição acima em $\Omega \cap V_\xi$.

Desta forma, se ω for uma barreira local em ξ, então podemos definir uma barreira em ξ relativa a todo o conjunto Ω tomando uma bola B contendo ξ e satisfazendo $B \subset\subset V_\xi$ e $m = \underset{V_\xi - B}{inf}\, w(x) > 0$. Nestas condições, não fica difícil ver que a função

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} min\, \{m, w(x)\}, \text{ para } x \in \overline{\Omega} \cap B \\ m, \text{ se } x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

é uma barreira em ξ relativa a Ω.

Definição 4.1.10 (***Ponto de Fronteira Regular***). *Um ponto $x \in \partial\Omega$ será dito um ponto regular se existir uma função barreira neste ponto.*

Lema 4.1.11. *Seja u a função de Perron (Teorema 4.1.8). Se $\xi \in \partial\Omega$ (Ω limitado) for um ponto regular e φ for uma função contínua em ξ, então $u(x) \to u(\xi)$ quando $x \to \xi$.*

Prova. Sejam $\varepsilon > 0$ e $M = \underset{x \in \partial\Omega}{sup} |\varphi(x)|$. Como ξ é ponto regular, então existe $w \in C^0(\overline{\Omega})$ função barreira em ξ. Assim, usando w e o fato de φ ser contínua em ξ temos que existem k,$\delta > 0$ tais que,

$$\begin{aligned} &|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x - \xi| < \delta \text{ e} \\ &kw(x) \geq 2M \text{ caso } |x - \xi| \geq \delta, \end{aligned}$$

sendo que esta última fica mais clara quando observamos que $w(x) > 0$ em $|x - \xi| \geq \delta$.

Agora, considerando as funções,

$$a(x) = \varphi(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} - kw(x) \text{ e } b(x) = \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} + kw(x),$$

definidas em $\overline{\Omega}$. Temos, respectivamente, uma subfunção e uma superfunção relativas à φ. Provemos que $a(x)$ é subfunção relativa à φ, isto é, mostremos que $a(x)$ é subharmônica em Ω e que $a(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$. Assim, seja $B \subset\subset \Omega$ uma bola e h uma função harmônica em B tal que $a(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \partial B$, ou seja,

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in \partial B.$$

No entanto, $h(x) - \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}$ também é harmônica em B e, sendo $-kw$ subharmônica em Ω (já que w é superharmônica em Ω), segue que

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in B,$$

isto é, $a(x)$ é subharmônica em Ω. Para mostrar que $a(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$, dividiremos em casos. Seja $x_0 \in \partial\Omega$,

Caso $|x_0 - \xi| < \delta$: Se $x_0 = \xi$, então $\varphi(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} - kw(\xi) = \varphi(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(\xi)$. Agora, se $x_0 \neq \xi$, então, $-\frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x_0) - \varphi(\xi)$ e, sendo $-kw(x_0) \leq 0$, obtemos

$$-\frac{\varepsilon}{2} - kw(x_0) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x_0) - \varphi(\xi).$$

Assim, fica demonstrado, neste caso, que $a(x_0) \leq \varphi(x_0)$.

Caso $|x_0 - \xi| \geq \delta$: Já sabemos, de antemão, que $kw(x_0) \geq 2M \geq -2\varphi(x_0)$, ou, equivalentemente, que $-kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0)$ e, desta última desigualdade, concluímos que

$$-\frac{\varepsilon}{2} - kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0).$$

Por outro lado, $kw(x_0) \geq 2M \geq 2\varphi(\xi)$. Conseqüentemente

$$-\frac{\varepsilon}{2} - kw(x_0) \leq -2\varphi(\xi).$$

Somando as duas desigualdades em destaque obtemos $a(x_0) \leq \varphi(x_0)$, finalizando a prova de que $a(x)$ é subfunção relativa à φ. A prova de que $b(x)$ é superfunção relativa à φ será deixada a cargo do leitor.

De volta ao objetivo central, usando a definição de u e o fato de que toda subfunção relativa à φ é menor do que ou igual a toda superfunção relativa à φ, temos,

$$\varphi(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} + kw(x),$$

o que é o mesmo que,

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + kw(x).$$

No entanto, como $w(x) \to w(\xi) = 0$ quando $x \to \xi$, então basta tomarmos x suficientemente próximo de ξ para termos $w(x) < \frac{\varepsilon}{2k}$ e, portanto,

$$|u(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon,$$

finalizando a prova. ∎

Teorema 4.1.12. *O problema de Dirichlet clássico* $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$ *em um domínio limitado* Ω *é solúvel para qualquer* φ *contínua na fronteira de* Ω *se, e somente se, os pontos da fronteira de* Ω *forem regulares.*

Prova. Suponha que o problema de Dirichlet acima seja solúvel para toda φ em $C^0(\partial\Omega)$. Seja $\xi \in \partial\Omega$ um ponto qualquer, porém fixo. Considere a aplicação $v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ em } \Omega \\ v = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = |x - \xi|$. Afirmamos que v é uma função barreira em ξ. Provemos.

Naturalmente $v(\xi) = 0$. Além disso, tome $B \subset\subset \Omega$ uma bola qualquer e h uma função harmônica em B de modo que $v(x) \geq h(x), \forall x \in \partial B$. Defina $\gamma : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\gamma(x) = v(x) - h(x)$. Temos que $\gamma \geq 0$ na ∂B e $\Delta\gamma = \Delta v - \Delta h = 0$ em B. Logo, pelo princípio do máximo, $\gamma \geq 0$ em B, ou seja, $v \geq h$ em B. Isto mostra que v é superharmônica em Ω. Resta-nos mostrar que $v > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$.

Novamente, usando o princípio do máximo temos que $v \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Seja $p \in \partial\Omega$ o ponto onde v atinge seu mínimo. Admita, por absurdo, que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $v(x_0) = 0$. Como $v \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ temos que $v(p) = 0$, logo v atinge mínimo em ponto interior e, portanto, v é constante em $\overline{\Omega}$. Absurdo. Logo $v > 0$ em Ω e, com isso, temos que v é função barreira em ξ, isto é, ξ é ponto regular.

A outra implicação é decorrente do Teorema 4.1.8 e do Lema 4.1.11. ∎

Definição 4.1.13 (***Função Hölder contínua de ordem*** α). *Uma função f, definida em $\Omega \subset I\!R^n$, será dita Hölder contínua de ordem α se satisfizer:*

$$sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty$$

onde $\alpha \in (0,1]$. Escrevemos o supremo acima como $[f]_{\alpha,\Omega}$.

Definição 4.1.14 (***Função Localmente Hölder Contínua de ordem*** α). *Uma função $f : \Omega \longrightarrow I\!R$ será dita localmente Hölder contínua de ordem α se $\forall x_0 \in \Omega$ existir uma vizinhança V_{x_0}, de x_0, tal que f é Hölder contínua de ordem α nesta vizinhança, ou seja,*

$$sup_{\substack{x,y\in V_{x_0} \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

Denota-se este supremo por $[f]_{\alpha,x_0}$.

Observações: $i)$ Alguns autores definem f localmente contínua de ordem α em Ω como uma função que é Hölder contínua de ordem α em todo subconjunto compacto K de Ω. Pode-se demonstrar que esta definição equivale a nossa.

$ii)$ Temos $\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum\limits_{j=0}^{k} \sup\limits_{\Omega} \sup\limits_{|\beta|=k} \left|\partial^{\beta} f\right|$, e daí que

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sup_{|\beta|=k} [\partial^{\beta} f]_{\alpha,\Omega}$$

Definição 4.1.15 (***Espaços de Hölder***). *Seja $k \in I\!N \in \{0\}$. Definimos os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^{k,\alpha}(\Omega)\right)$ como sendo subespaços de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^k(\Omega)\right)$ constituídos das funções cujas $k-$ésimas derivadas são Hölder contínuas (localmente Hölder contínuas) de ordem α em Ω.*

Lema 4.1.16. *Sejam f limitada e integrável em Ω, e w o potencial newtoniano de f. Então $w \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e para qualquer $x \in \Omega$,*

$$\partial_i w(x) = \int_{\Omega} \partial_i E(x-y) f(y)\, dy, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Prova. Para uma prova, veja [11]. ■

Lema 4.1.17. *Sejam f limitada e localmente Hölder contínua de ordem α (≤ 1) em Ω, e w o potencial newtoniano de f. Então $w \in C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ em Ω e, para qualquer $x \in \Omega$ e para $i, j = 1, 2, ..., n$,*

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{\Omega_0} [\partial_{ij} E(x-y)] [f(y) - f(x)] \, dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i E(x-y) \, \eta_i(y) \, ds_y,$$

onde Ω_0 é qualquer domínio contendo Ω para o qual valha o Teorema da Divergência, $\eta_i(y)$ é a $i-$ésima coordenada do vetor unitário normal exterior em y e f foi estendida por zero fora de Ω.

Prova. Ver [11]. ■

Teorema 4.1.18. *Seja Ω um domínio limitado e suponha que cada ponto da $\partial\Omega$ seja regular. Então se f for uma função limitada, localmente Hölder contínua de ordem α em Ω, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \textit{em} \ \Omega \\ u = \varphi \ \textit{na} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

é unicamente resolúvel para qualquer função φ contínua em $\partial\Omega$.

Prova. Seja w o potencial newtoniano de f. Pelo Lema 4.1.17, $\Delta w = f$ em Ω e, além disso, pelo Teorema 4.1.12, existe v (única) tal que

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ em } \Omega \\ v = \varphi - w \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

uma vez que $\partial\Omega$ é uma fronteira constituída de pontos regulares e $\varphi - w$ é contínua na $\partial\Omega$. Definindo $u = w + v$, temos

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta w + \Delta v = f + 0 \text{ em } \Omega \\ u = w + v = w + \varphi - w = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

finalizando a prova. ■

4.2 O Princípio do Máximo Forte e Aplicações

Seja $\Omega \subset I\!R^n$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente suave e considere a equação diferencial linear parcial

$$P(u) \equiv A(u) + au = f \text{ em } \Omega, \tag{4.4}$$

onde

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i}.$$

Assuma que a, f, a_{ik}, a_i são funções contínuas em Ω $(1 \le i, k \le n)$ e que P é um operador elíptico em Ω, isto é, $\forall x \in \Omega$ e para qualquer ponto ξ de $I\!R^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \neq 0$, temos que $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > 0$.

Além de tudo isso, ressaltamos que, por **solução** de (4.4), entenderemos uma função $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ que satisfaz (4.4) em Ω.

Lema 4.2.1. *Suponha que A e B sejam matrizes simétricas de ordem n, com $A \ge 0$ e $B \le 0$. Então $tr(A.B) \le 0$.*

Prova. Como $A \ge 0$ e é simétrica, então existe uma matriz ortogonal C que diagonaliza A, isto é,

$$CAC^{-1} = D_1,$$

com os elementos da diagonal principal de D_1 são não-negativos. Analogamente, existe E, uma matriz ortogonal, tal que

$$EBE^{-1} = D_2,$$

onde a diagonal principal de D_2 é constituída apenas de elementos não-positivos. Agora, usando o fato de que o traço de um produto independe da ordem dos fatores, temos

$$\begin{aligned} tr(AB) &= tr(A.I.B.I) = tr\left(A.C.C^{-1}.B.E.E^{-1}\right) \\ &= tr\left(C.A.C^{-1}.E.B.E^{-1}\right) = tr(D_1.D_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii}^{(1)} d_{ii}^{(2)} \le 0, \end{aligned}$$

onde $d_{ii}^{(j)}$ é o $i-$ésimo elemento da diagonal principal da matriz D_j, $j = 1, 2$. ■

Lema 4.2.2. *Se $Au \geq 0$ (respectivamente $Au \leq 0$) em Ω e existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x) \leq u(x_0)$ (respectivamente $u(x) \geq u(x_0)$) para todo $x \in \Omega$, então temos que $u(x) \equiv u(x_0)$ em $\overline{\Omega}$.*

Prova. Digamos que $Au \geq 0$ e que $u(x_0) = m$. Defina $M = \{x \in \Omega;\ u(x) = m\}$. Note que M é não-vazio e fechado em Ω. Suponha, por contradição, que tenhamos $u \not\equiv m$ em $\overline{\Omega}$. Assim M está propriamente contido em Ω. Seja $x_1 \in \Omega \backslash M$. Conectando x_1 a x_0 por uma curva γ em Ω, vemos que, pelo fato de γ constituir um conjunto compacto de pontos em Ω, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(p, \partial\Omega) \geq \delta > 0$, $\forall p \in \gamma$.

Desde que $u(x) \leq u(x_0)$, $\forall x \in \Omega$ e $x_1 \notin M$, então $u(x_1) < u(x_0)$. Por esta razão, $u(x) < u(x_0)$ em alguma bola de centro x_1 e raio $\delta/2$.

Se x_1 move-se ao longo de γ na direção de x_0, então esta bola citada acima, em algum momento conterá um ponto de M. Desta forma, existe uma bola aberta B satisfazendo:

$$\overline{B} \subset \Omega,\ \partial B \cap M \neq \emptyset,\ B \cap M = \emptyset \text{ e } u(x) < m \text{ em } B.$$

Chamando o ponto que configura $\partial B \cap M \neq \emptyset$ pelo mesmo nome de x_0 (e doravante nos referiremos apenas a ele), tome $B_1 = B_1(\widetilde{x}) \subset \overline{B}$ como uma bola menor de raio r_1 tal que $x_0 \in \partial B_1$. Então $u(x) < m$ em $\overline{B}_1 \backslash \{x_0\}$.

Seja $B_2 \subset \Omega$ uma terceira bola centrada em x_0 e com raio $r_2 < r_1$. Escrevendo $\partial B_2 = T_1 \cup T_2$, onde $T_1 = \overline{B}_1 \cap \partial B_2$, temos que T_1 é compacto. Desde que $u < m$ em T_1, então $u \leq m - \varepsilon$ em T_1 para algum $\varepsilon > 0$.

Agora, considere a função de comparação

$$h(x) = e^{-\alpha|x-\widetilde{x}|^2} - e^{-\alpha r_1^2},$$

onde $\alpha > 0$ será escolhido em breve. Assim,

$$\begin{aligned} e^{\alpha|x-\widetilde{x}|^2} A(h) &= e^{\alpha|x-\widetilde{x}|^2} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} h_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i h_{x_i} \right) \\ &= 4\alpha^2 \sum_{i,k=1}^{n} \left[a_{ik} (x_i - \widetilde{x}_i)(x_k - \widetilde{x}_k) \right] - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ii} + (x_i - \widetilde{x}_i) a_i \right]. \end{aligned}$$

Ora, mas como $r_2 < r_1$, $\widetilde{x} \notin \overline{B}_2$ e, por hipótese

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)(x_i - \widetilde{x}_i)(x_k - \widetilde{x}_k) \geq \sigma > 0 \text{ em } \overline{B}_2.$$

Deste modo, basta escolhermos α suficientemente grande para garantirmos que $Ah > 0$ em $\overline{B}_2$.

Sejam $v(x) = u(x) + \varepsilon_1 h(x)$ e $k = max\{h(x),\ x \in T_1\}$, onde $\varepsilon_1 > 0$ a princípio. Então, em T_1,

$$v(x) \leq m - \varepsilon + \varepsilon_1 h(x) \leq m - \varepsilon + \varepsilon_1 k.$$

Ora, mas se fizermos $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{k}$, então obteremos, da desigualdade acima,

$$v(x) < m \ \ (\text{em } T_1),$$

e, portanto, podemos facilmente obter que $v(x) < m$ em $T_1 \cup T_2 = \partial B_2$.

Por outro lado, como $v(x_0) = u(x_0) + \varepsilon_1 h(x_0) = m$, vemos que v possui um ponto de máximo em $\widehat{x} \in B_2$ (pois ele não poderia estar na ∂B_2). Nestas condições, sabemos do cálculo diferencial que $\nabla v(\widehat{x}) = 0$. Assim, para qualquer $\xi \in I\!R^n$,

$$\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}(\widehat{x})\,\xi_i \xi_k \leq 0.$$

Mas, por elipticidade, temos que

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\widehat{x})\,\xi_i \xi_k \geq 0,$$

e, usando o Lema 4.2.1, concluímos que

$$0 \geq \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\widehat{x})\, v_{x_i x_k}(\widehat{x}) = Av(\widehat{x}) = Au(\widehat{x}) + \varepsilon_1 Ah(\widehat{x}) > Au(\widehat{x}),$$

o que caracteriza um absurdo, visto que $Au \geq 0$. ∎

Segue, neste momento, uma atualização no princípio do máximo que vínhamos utilizando. Este resultado é chave nesta seção e será amplamente utilizado.

Teorema 4.2.3 (***Princípio do Máximo Forte para Soluções de*** (4.4)). *Suponha que $a(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. Se $f(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, então toda solução não-constante de* (4.4) *atinge seu máximo positivo* (*caso ele exista*) *na $\partial\Omega$ e não em Ω.*

Prova. Seja u uma solução não constante de (4.4) e admita, por absurdo, que $x_0 \in \Omega$ seja um ponto de máximo positivo de u. Digamos que $u(x_0) = m > 0$.

Defina $M = \{x \in \Omega;\ u(x) = m\}$. É fácil verificar que $M \neq \emptyset$ e é fechado. Tome $\widetilde{x} \in M$ um elemento qualquer, logo $u(\widetilde{x}) = m > 0$. Como $\widetilde{x}$ é ponto interior de Ω e u é contínua, então existe uma bola $B(\widetilde{x}, \varepsilon) \subset \Omega$ tal que

$$u(x) \leq u(\widetilde{x}) \text{ e } u(x) > 0,\ \forall x \in B(\widetilde{x}, \varepsilon).$$

Assim, como $Pu = f$ em Ω, $Pu = f$ em $B(\widetilde{x}, \varepsilon)$, e, portanto,

$$Au(x) = -au(x) + f(x) \geq 0, \text{ para todo } x \text{ de } B(\widetilde{x}, \varepsilon).$$

Conseqüentemente, pelo Lema 4.2.2, temos que $u = m$ em $B(\widetilde{x}, \varepsilon)$, em outras palavras, $B(\widetilde{x}, \varepsilon) \subset M$. Isto mostra, pela arbitrariedade de $\widetilde{x} \in M$, que M é aberto. Ora, chegamos então que M é aberto e fechado em Ω. No entanto, sendo Ω conexo, apenas ele mesmo e o conjunto vazio são simultaneamente abertos e fechados em Ω, logo, $M = \Omega$ ou $M = \emptyset$. Como, de antemão, já sabíamos que $M \neq \emptyset$, segue que $M = \Omega$, e isto nos leva a $u \equiv m$ em Ω, o que é um absurdo. ■

Observações: $i)$ O Teorema 4.2.3 possui uma versão para o mínimo. A saber, basta, no enunciado acima, trocarmos $f(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ por $f(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e "máximo positivo"por "mínimo negativo".

$ii)$ A hipótese $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ é essencial, pois se considerarmos o problema

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0 \text{ em } \Omega,$$

onde Ω é o retângulo $\{(x, y);\ 0 \leq x, y \leq \pi\}$, então, como pode-se facilmente verificar, $u(x, y) = sen\ x.sen\ y$ é solução da equação acima e possui um ponto de máximo em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ que não pertence à fronteira de Ω.

Corolário 4.2.4. *Sejam u_1 e u_2 soluções de $Pu = f$ em Ω, com $u_i = \phi_i$ na $\partial\Omega$, $i = 1, 2$. Então, se $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$,*

$$\max_{x \in \Omega} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Prova. Se $u = u_1 - u_2$, então $Pu = 0$ em Ω. Com $u_i = \phi_i$ em $\partial\Omega$, $i = 1, 2$. O resultado seguirá do Teorema 4.2.3. ∎

Corolário 4.2.5. *O problema*

$$\begin{cases} Pu = f \text{ em } \Omega \\ u = \phi \text{ na } \partial\Omega \end{cases} (a \leq 0), \tag{I}$$

possui no máximo uma solução.

Prova. Sejam u_1 e u_2 soluções do problema (I) acima e defina $u = u_1 - u_2$. Então u é solução do problema

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Provemos.

Suponha, por absurdo, que $u \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Seja $u(\overline{x}) = m \neq 0$ um extremante de u em $\overline{\Omega}$. Se $u(\overline{x}) > 0$, então, pelo Teorema do Máximo Forte, $\overline{x} \in \partial\Omega$. Absurdo, já que na $\partial\Omega$, $u = 0$.

Caso $u(\overline{x}) < 0$, usando a versão do Teorema 4.2.3 para o mínimo, concluímos que $\overline{x} \in \partial\Omega$ e, portanto, $u(\overline{x}) = 0$. Absurdo, conseqüentemente $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto, $u_1 = u_2$. ∎

Lembramos, agora, que, se chamarmos de $\eta(x)$ o vetor unitário normal externo no ponto $x \in \partial\Omega$, então o vetor v será dito um vetor externo em x se $\eta(x).v > 0$.

Agora, suponha que seja dada a equação (4.4) em Ω, onde $f \geq 0$ e $a \leq 0$ em Ω, e $\partial\Omega$ é suave $(C^1$ por exemplo$)$. Do Teorema 4.2.3 sabemos que o máximo positivo de u, se existir, deve ser assumido em $p \in \partial\Omega$. Sem a menor dificuldade, verifica-se que $\frac{\partial u}{\partial v}(p) \geq 0$. No entanto, provaremos aqui um resultado mais forte; que é o fato de que, nestas condições, sempre há fluxo em um ponto de máximo positivo, isto é, $\frac{\partial u}{\partial v}(p) > 0$.

Antes de passarmos ao resultado referido, vejamos um lema auxiliar.

Lema 4.2.6. *Suponha que u seja contínuo em $\overline{\Omega}$, $Au \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, que u atinja seu máximo positivo em $p \in \partial\Omega$. Então, toda derivada direcional externa de u em p é positiva, a menos que u seja identicamente igual a uma constante em Ω.*

Prova. Como antes, podemos encontrar uma bola $B \subset \overline{\Omega}$, cuja ∂B está contida em $\Omega \cup \{p\}$. Digamos que r seja o raio de B e que q seja seu centro. Considere K uma bola centrada em p com raio $\frac{r}{2}$. Defina a função auxiliar

$$h(x) = e^{-\alpha|x-q|^2} - e^{-\alpha r^2},$$

onde α é escolhido suficientemente grande de modo que $A(h) > 0$ em K. Novamente, considere $v(x) = u(x) + \varepsilon h(x)$. Se $u \not\equiv u(x_0)$, então $u < u(p)$ em $\overline{B} \setminus \{x_0\}$. Escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que tenhamos $v(x) \leq v(p) - \delta$ em $K \cap B$ (δ como no Lema 4.2.2). Consequentemente, em p,

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \upsilon} = \frac{\partial v}{\partial \upsilon} \geq 0.$$

Mostraremos agora que $\frac{\partial h}{\partial \upsilon}(p) < 0$. Temos que,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = -2\alpha (x_i - q_i) e^{-\alpha|x-q|^2}$$

e, portanto,

$$\nabla h(x) = -2\alpha e^{-\alpha|x-q|^2}(x-q).$$

O vetor normal em p será dado por $\eta(p) = (\eta_1, ..., \eta_n) = \left(\frac{x_1 - q_1}{r}, ..., \frac{x_n - q_n}{r}\right)$. Desta forma, em p

$$\frac{\partial h}{\partial \upsilon}(p) = \nabla h(p).\upsilon = -2\alpha e^{-\alpha r^2}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - q_i).\upsilon_i = -2\alpha r e^{-\alpha r^2}.\sum_{i=1}^{n}\eta_i.\upsilon_i < 0.$$

finalizando a prova, uma vez que isto implica em $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) > 0$. ■

Teorema 4.2.7. *Suponha que $a(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e que u seja uma solução de (4.4). Se $f \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e u atinge seu máximo positivo em $p \in \partial\Omega$, então toda derivada direcional externa de u, em p, é positiva, a menos que u seja constante.*

Prova. Como $\partial\Omega$ é suficientemente suave, tome $B \subset \overline{\Omega}$ de modo que

$$\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{p\} \text{ e } u \geq 0 \text{ em } \overline{B}.$$

Admitindo que $\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(p) \leq 0$ e, usando que $Au = f - au \geq 0$ em $\overline{B}$, temos, pelo lema anterior, que $u \equiv u(p)$ em B. Logo, $u \equiv u(p)$ em Ω. ■

Nota: Se trocarmos $f(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ por $f(x) \leq 0$ e se p for ponto de mínimo negativo, então $\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(p) < 0$, seja qual for a direção externa, υ, tomada.

Uma estimativa a-priori para soluções de uma dada equação diferencial parcial é simplesmente uma desigualdade que é válida para todas as soluções (se existirem) cujos dados e coeficientes obedecem a certas restrições.

Considere o seguinte problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} Pu \equiv Au + au = f \text{ em } \Omega \text{ (domínio limitado)} \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega \text{ (suave)}, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $a(x) \leq 0$ em Ω, Au definida como antes, $(a_{ik}(x))$ matriz simétrica e os coeficientes de P, bem como f, são contínuos em $\overline{\Omega}$. Além disso, φ é assumida contínua em $\partial\Omega$ e, finalmente, assumiremos que P é uniformemente elíptico, isto é, que existe uma constante $m > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \geq m\,|\xi|^2, \tag{4.6}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Seja K um limitante para as quantidades $|a_{ik}(x)|$, $|a_i(x)|$, e $|a(x)|$ em $\overline{\Omega}$, $i, k = 1, 2, ..., n$.

Teorema 4.2.8. *Se $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ for uma solução de* (4.5), *então existe uma constante $M = M(m, K, \Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M\,\|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Prova. Trocando coordenadas (se necessário) através de uma transformação linear, a expressão (4.6) é invariante e o problema de fronteira (4.5) fica da mesma forma. Por esta razão, sem perda de generalidade, assumiremos que $x_1 \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Defina, em $\overline{\Omega}$,

$$h(x) = \|\varphi\|_{\infty(\partial\Omega)} + \left(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}\right)\|f\|_{\infty(\overline{\Omega})},$$

onde $\xi > max\ \left\{x_1, x \in \overline{\Omega}\right\}$ e α é escolhido, suficientemente grande, de modo que

$$m\alpha^2 - k(\alpha+1) \geq 1 \text{ e } e^{\alpha\xi} > 2 \max_{x\in\overline{\Omega}} e^{\alpha x_1}.$$

Se $\widetilde{\xi} = (1, 0, ..., 0)$, então, pela elipticidade uniforme do operador,

$$a_{11}(x) \geq m,\ \forall x \in \Omega.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-Ph &= -a\|\varphi\|_\infty + \left[-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha x_1}\left(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a\right)\right]\|f\|_\infty \\
&\geq \left[-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha x_1}\left(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a\right)\right]\|f\|_\infty \\
&\geq \left[m\alpha^2 - a + a_1\alpha\right]e^{\alpha x_1}\|f\|_\infty \geq \left[m\alpha^2 - K - K\alpha\right]e^{\alpha x_1}\|f\|_\infty \\
&= \left[m\alpha^2 - K(\alpha+1)\right]e^{\alpha x_1}\|f\|_\infty \geq e^{\alpha x_1}\|f\|_\infty \geq \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $v(x) = u(x) - h(x)$ temos que

$$v(x) = \varphi(x) - h(x) \leq 0 \text{ na } \partial\Omega$$

já que, na fronteira, $h(x) = \|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}\right)\|f\|_\infty \geq \|\varphi\|_\infty \geq \varphi(x)$. Além disso,

$$Pv = Pu - Ph = f - Ph \geq f - Ph \geq f + \|f\|_\infty \geq 0.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Forte, $v \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $u \leq h$ em $\overline{\Omega}$. Analogamente, definindo $w(x) = u(x) + h(x)$ temos

$$w(x) = \varphi(x) + h(x) \geq 0 \text{ na } \partial\Omega$$

pois $h(x) \geq \|\varphi\|_\infty \geq \varphi(x)$ na $\partial\Omega$.

Também, $Pv = Pu + Ph = f + Ph \leq f - \|f\|_\infty \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, e, pelo Teorema do Máximo novamente, $v(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $u \geq -h$. Com isso, $|u| \leq h$ em $\overline{\Omega}$, e daí,

$$|u(x)| \leq h(x) \leq \|\varphi\|_\infty + M\|f\|_\infty ,$$

onde $M = \max_{x\in\overline{\Omega}}\left(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}\right) \leq e^{\alpha\xi} - 1$, resultando em

$$\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M\|f\|_{L^\infty\left(\overline{\Omega}\right)} ,$$

como queríamos. ■

Note agora que, se não exigirmos que $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, podemos ainda obter uma estimativa da forma

$$\|u\|_{\infty(\overline{\Omega})} \leq c\left(\|\varphi\|_{\infty(\overline{\Omega})} + \|f\|_{\infty(\overline{\Omega})}\right), \tag{4.7}$$

onde $c(m, K, \Omega)$, desde que Ω seja suficientemente "estreito" em alguma direção (x_1 por exemplo). Em termos mais precisos, (4.7) irá manter-se caso

$$\left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\|a\|_{\infty(\overline{\Omega})} < 1,$$

onde ξ e α são como na prova do teorema anterior. Vejamos:

Seja $b(x) = min\{a(x), 0\}$. Escrevendo

$$Au + bu = (b - a)u + f = g,$$

podemos aplicar a estimativa obtida no Teorema 4.2.8 para obtermos,

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &\leq \|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\|g\|_\infty \\
&\leq \|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\left(\|b - a\|_\infty \|u\|_\infty + \|f\|_\infty\right) \\
&\leq \|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\left(\|a\|_\infty \|u\|_\infty + \|f\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

De modo que

$$\left[1 - \|a\|_\infty\left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\right]\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\|f\|_\infty,$$

e, portanto,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|\varphi\|_\infty + \left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\|f\|_\infty}{\left[1 - \|a\|_\infty\left(e^{\alpha\xi} - 1\right)\right]},$$

como queríamos.

A existência de solução do problema (4.4), com A uniformemente elíptico em Ω, dependerá de alguns fatos, que colocamos abaixo. Usaremos como norma em $C^2(\Omega)$,

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} = \|u\|_\infty + \max_{1 \leq i \leq n}\|\partial_i u\|_{C^{0,\alpha}} + \max_{1 \leq i \leq n}\|\partial_{ij} u\|_{C^{0,\alpha}}. \tag{4.8}$$

Também faremos uso da seguinte norma em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^2(\Omega)} + \max_{1 \leq i \leq n}\|\partial_{ij} u\|_\alpha. \tag{4.9}$$

Além disso, necessitaremos da chamada estimativa de Schauder,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\,\|f\|_{\alpha}\,, \tag{4.10}$$

válida para toda $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ solução de $\begin{cases} Pu = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$, $c = c\,(k, m, \Omega)$, m é a constante de elipticidade e k um limitante para os coeficientes de P. Finalmente, pode ser mostrado que se $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ então a solução $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Nota: O leitor pode encontrar provas e mais informações sobre o exposto acima em [11].

Teorema 4.2.9. *Para cada $f \in C^{0,\alpha}\,(\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} Pu = f \;\; em\; \Omega \\ u = \varphi \;\; na\; \partial\Omega, \end{cases}$$

é unicamente solúvel. Onde $\varphi \in C^{0}\,(\partial\Omega)$ e A é uniformemente elíptico em Ω.

Prova. A unicidade decorre do Corolário 4.2.5. Mostremos a solubilidade. Seja $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ qualquer, porém fixa. Considere a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} P_t\,(u) \equiv tPu + (1-t)\,\Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

com $t \in [0,1]$. Agora, olhe para o conjunto

$$T = \left\{t \in [0,1]\,;\, \exists \text{ solução } u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ para } (4.11)\right\}.$$

Afirmo que $T = [0,1]$ e, portanto, que (4.4) tem solução em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, já que, com isso, é só tomar $t = 1$.

A idéia é mostrar que T é aberto e fechado em $[0,1]$. Iniciemos mostrando que T é aberto. Naturalmente $T \neq \emptyset$ pois $0 \in T$. Seja $t_0 \in T$ arbitrário e defina, para cada $t \in [0,1]$, a aplicação $\phi_t : C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ por $\phi_t\,(u) = v$, onde v é a *única* solução em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ de

$$\begin{cases} P_{t_0} v = (t - t_0)\,(\Delta u - Pu) + f \text{ em } \Omega \\ v = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.12}$$

sendo que, para afirmar que v é a única solução, estamos usando o fato de que $t_0 \in T$ e, em particular, o problema (4.11) para $t = t_0$ com f igual a $\{(t-t_0)[\Delta u - Pu] + f\} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Admitamos, por um momento, que $w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ seja ponto fixo de ϕ_t. Daí, em Ω,

$$P_{t_0}w = (t-t_0)(\Delta w - Pw) + f,$$

ou seja, $P_t w = f$ em Ω. Sendo $w = \varphi$ na $\partial\Omega$, segue que pontos fixos de ϕ_t são soluções de (4.11). Baseados neste raciocínio, procuremos mostrar que ϕ_t possui ponto fixo. Para isto, mostraremos que ϕ_t é uma contração para t suficientemente próximo de t_0 (Note que isso equivale a mostrar que t_0 é ponto interior de T, ou seja, T é aberto em $[0,1]$).

Sejam $u_1,u_2 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\phi_t(u_1) = v_1$ e $\phi_t(u_2) = v_2$. Assim

$$\begin{cases} P_{t_0}v_i = (t-t_0)[\Delta u_i - Pu_i] + f \text{ em } \Omega \\ v_i = \varphi \text{ na } \partial\Omega \end{cases}, \ i = 1,2.$$

Subtraindo, obtemos

$$\begin{cases} P_{t_0}(v_1 - v_2) = (t-t_0)[\Delta(u_1-u_2) - P(u_1-u_2)] \text{ em } \Omega \\ v_1 - v_2 = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Todavia,

$$\begin{aligned} \|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} &= \|v_1 - v_2\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ &\leq c\,|t-t_0|\,\|\Delta(u_1-u_2) - P(u_1-u_2)\|_\alpha \\ &\leq cc_1\,|t-t_0|\,\|u_1-u_2\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}, \end{aligned}$$

onde c não depende de t, c, u_1, u_2. Escolhendo $\varepsilon \leq \frac{1}{2cc_1}$ temos que, para $|t-t_0| < \varepsilon$,

$$\|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

isto é, ϕ_t é uma contração se $|t-t_0| < \varepsilon$ e, portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, possui ao menos um ponto fixo.

Neste momento, voltemos nossos olhos para a demonstração de que T é fechado em $[0,1]$. Seja $(t_j) \subset T$ uma seqüência tal que $t_j \to t$. Queremos mostrar que $t \in T$. Como $(t_j) \subset T$, então, para cada $j \in I\!N$, existe $u_j \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo

$$\begin{cases} P_{t_j}u_j = f \text{ em } \Omega \\ u_j = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, sabemos que $\|u_j\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq c\,\|f\|_{\alpha}$, $\forall j \in I\!N$. Assim, sem grandes dificuldades temos que as seqüências (u_j), (∂u_j) e $(\partial^2 u_j)$ são todas equicontínuas em Ω, onde ∂u_j e $\partial^2 u_j$ designam as primeiras e segundas derivadas de u_j, respectivamente. Aplicando o Teorema de Ascoli-Arzelá, temos que existe uma subseqüência (u_{j_k}) que converge, juntamente com suas primeiras e segundas derivadas, uniformemente em $\overline{\Omega}$ para $\widetilde{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\partial\widetilde{u}$ e $\partial^2\widetilde{u}$, nesta ordem. Deste modo, em Ω,

$$f = \lim_{k\to\infty} P_{t_{j_k}} u_{j_k} = P_t\widetilde{u},$$

e, sendo $u_{j_k} = \varphi$ na $\partial\Omega$, segue, por continuidade, que $\widetilde{u} = \varphi$ na $\partial\Omega$, e consequentemente T é fechado em $[0,1]$.

Para finalizar, com os fatos de que T é fechado e aberto em $[0,1]$ e que $[0,1]$ é conexo, temos que $T = \emptyset$ ou $T = [0,1]$. Como a primeira opção já foi descartada, segue o resultado. $\blacksquare$

Capítulo 5

TEOREMAS DE PONTO FIXO E ESPAÇOS DE SOBOLEV

5.1 Teoremas de Ponto Fixo de Leray-Schauder

O objetivo desta seção é apresentar os teoremas de ponto fixo de Schauder, visto que eles constituem ferramentas chave para assegurar a existência de solução de alguns problemas de fronteira, como veremos posteriormente.

Teorema 5.1.1 (***de Brouwer***). *Uma transformação contínua de uma bola fechada no $I\!R^n$ nela mesma, possui ao menos um ponto fixo.*

Prova. Veja [11]. ■

Teorema 5.1.2. *Seja $\mathcal{G}$ um conjunto compacto e convexo em um espaço de Banach $\mathcal{B}$. Considere, ainda, $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ uma transformação contínua. Então T possui ponto fixo.*

Prova. Tome $k \in I\!N$. Como $\mathcal{G}$ é compacto, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{G}$, tais que a união das bolas $B_i = B_{\frac{1}{k}}(x_i)$ cobre $\mathcal{G}$ (n depende de k). Considere agora a envoltória convexa de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, que chamaremos de $\mathcal{G}_k$. Note que $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}$. Defina $J_k : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_k$ por

$$J_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [dist(x_i, \mathcal{G} - B_i) .x_i]}{\sum_{i=1}^{n} dist(x_i, \mathcal{G} - B_i)}.$$

Sem grande dificuldade, encontra-se que J_k é contínuo e, além disso, dado $x \in \mathcal{G}$, chamando $\alpha_i = dist\left(x_i, \mathcal{G} - B_i\right),\ i = 1, 2, ..., n$, temos

$$\begin{aligned} \left\| J_k\left(x\right) - x \right\|_2 &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} - x \right\| = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i - x\right) \right\|}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| x_i - x \right\|}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \\ &< \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando a aplicação $J_k \circ T : \mathcal{G}_k \longrightarrow \mathcal{G}_k$, vemos que $J_k \circ T$ é contínua, visto que é composição de contínuas. Além disso, sendo o conjunto $\mathcal{G}_k$ homeomorfo a uma bola fechada em algum espaço euclidiano, segue, aplicando o Teorema de Brouwer a esta bola fechada e depois retornando através do homeomorfismo para $\mathcal{G}_k$, que $J_k \circ T$ possui um ponto fixo $x_k \in \mathcal{G}_k$. Fazendo k variar em $\mathbb{N}$, obtemos uma seqüência $(x_k) \subset \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}$. Ora, mas $\mathcal{G}$ é compacto, logo (x_k) possui uma subseqüência (denotaremos por (x_k) mesmo) que converge para algum $x_0 \in \mathcal{G}$. Pois bem, este x_0 é ponto fixo de T. Provemos.

De fato, como $x_k \to x_0$, então, por continuidade, $Tx_k \to Tx_0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\left\| x_k - x_0 \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ e $\left\| Tx_k - Tx_0 \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Desta forma,

$$\left\| x_0 - Tx_0 \right\|_2 \leq \left\| x_0 - x_k \right\|_2 + \left\| x_k - Tx_k \right\|_2 + \left\| Tx_k - Tx_0 \right\|_2 < \varepsilon,$$

já que $\left\| x_k - Tx_k \right\|_2 = \left\| J_k \circ T\left(x_k\right) - Tx_k \right\|_2 < \frac{1}{k}$, finalizando a prova. ■

Antes do próximo resultado, notamos que um conjunto A será dito ser *pre-compacto* se o seu fecho for compacto.

Corolário 5.1.3. *Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto fechado e convexo em um espaço de Banach $\mathcal{B}$ e T uma transformação contínua de $\mathcal{G}$ nele mesmo tal que $T\mathcal{G}$ é pre-compacto. Então T possui ponto fixo.*

Prova. A cargo do leitor. ■

DEFINIÇÃO 5.1.4 (***Transformação Compacta***). *Uma aplicação contínua T de X em Y (X e Y espaços de Banach), é dita ser compacta (ou completamente contínua) se as imagens por T de conjuntos limitados em X forem conjuntos precompactos em Y.*

OBSERVAÇÃO: Dizer que uma transformação $T : X \longrightarrow Y$ é compacta equivale a dizer que para toda seqüência limitada $(x_n) \subset X$, temos que a seqüência (Tx_n), que está em Y, possui uma subseqüência convergente.

TEOREMA 5.1.5 (***de Leray-Schauder: Caso especial***). *Seja T uma transformação compacta de um espaço de Banach $\mathcal{B}$ nele próprio, e suponha que exista uma constante m tal que*

$$\|x\|_{\mathcal{B}} < m$$

sempre que $x \in \mathcal{B}$ satisfaça $\sigma Tx = x$ para algum $\sigma \in [0,1]$. Então T possui ponto fixo.

PROVA. Todo símbolo de norma que aparecerá nesta prova refere-se à norma do espaço de Banach $\mathcal{B}$ e, por esta razão, será simplificado por $\|.\|$. Defina a aplicação $T^* : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{B_m(0)} = \overline{B}$ por

$$T^*x = \begin{cases} Tx, \text{ se } \|Tx\| < m \\ \frac{mTx}{\|Tx\|}, \text{ caso } \|Tx\| \geq m. \end{cases}$$

T^* é uma transformação contínua e, em particular, a restrição $T^*|_{\overline{B_m(0)}}$ é contínua. Agora, tome $(x_n) \subset \overline{B}$. Naturalmente (x_n) é uma seqüência limitada e, sendo $T\overline{B}$ um precompacto, então temos que a seqüência (Tx_n) possui uma subseqüência (Tx_{n_k}) tal que $Tx_{n_k} \to y \in \overline{T\overline{B}}$. Digamos, por simplicidade, que $\|Tx_{n_k}\| \geq m$, $\forall k$ natural. Deste modo,

$$T^*x_{n_k} = \frac{mTx_{n_k}}{\|Tx_{n_k}\|} \to \frac{my}{\|y\|} \in \overline{T^*\overline{B}}.$$

O caso onde $\|Tx_{n_k}\| \leq m$ é similar. Isto nos mostra que $T^*\overline{B}$ é precompacto também. Assim, pelo Corolário 5.1.3, T^* possui um ponto fixo $\widetilde{x} \in \overline{B}$. Afirmamos que este $\widetilde{x}$ é ponto fixo de T. Provemos.

De fato, suponha que $\|T\widetilde{x}\| \geq m$. Logo,

$$\widetilde{x} = T^*\widetilde{x} = \frac{mT\widetilde{x}}{\|T\widetilde{x}\|} = \sigma T\widetilde{x}, \text{ onde } \sigma = \frac{m}{\|T\widetilde{x}\|} \in [0,1],$$

e desta forma, por hipótese, $\|\widetilde{x}\| < m$. No entanto, da igualdade acima, obtemos

$$\|\widetilde{x}\| = \frac{m\,\|T\widetilde{x}\|}{\|T\widetilde{x}\|} = m.$$

Absurdo. Portanto, devemos obrigatoriamente ter que $\|T\widetilde{x}\| < m$ e isto nos dá que

$$\widetilde{x} = T^*\widetilde{x} = T\widetilde{x},$$

como procurávamos. ■

Lema 5.1.6. *Seja $B = B_m(0) \subset \mathcal{B}$ (Banach) e considere $T : \overline{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ contínua tal que $T\overline{B}$ é precompacto e $T\partial B \subset B$. Então T possui ponto fixo.*

Prova. Defina $T^* : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ por

$$T^*x = \begin{cases} Tx, \text{ para } \|Tx\| < m \\ \frac{mTx}{\|Tx\|}, \text{ se } \|Tx\| \geq m. \end{cases}$$

Como no teorema anterior, temos que T^* é contínua e que $T^*\overline{B}$ é precompacto. Logo, pelo Corolário 5.1.3, segue que existe $\widetilde{x} \in \overline{B}$ tal que $T^*\widetilde{x} = \widetilde{x}$. Por outro lado, como $T\partial B \subset B$, segue que $\widetilde{x} \in B$. Desta forma, temos que $\|T\widetilde{x}\| < m$ ou que $\|T\widetilde{x}\| \geq m$. Digamos que a segunda opção aconteça. Deste modo, $\widetilde{x} = \frac{mT\widetilde{x}}{\|T\widetilde{x}\|}$ e, daí, concluímos que $\|\widetilde{x}\| = m$, o que é um absurdo. Conseqüentemente, de fato teremos que $\|T\widetilde{x}\| < m$ e disto chegamos que $\widetilde{x}$ é ponto fixo de T. ■

Teorema 5.1.7 (***de Leray-Schauder***). *Sejam $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e $T : [0,1] \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ compacta tal que*

$$T(0,x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{B}.$$

Suponha, ainda, que exista uma constante m de modo que para todo (σ, x) pertencente a $[0,1] \times \mathcal{B}$, satisfazendo $x = T(\sigma, x)$, tenhamos que

$$\|x\|_{\mathcal{B}} < m.$$

Então $T_1 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ dada por $T_1 x = T(1,x)$ possui ao menos um ponto fixo.

Prova. Novamente usaremos a notação simplificada para a norma. Para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ defina $T_\varepsilon^* : \overline{B} = \overline{B_m(0)} \longrightarrow \mathcal{B}$ por

$$T_\varepsilon^* x = \begin{cases} T\left(\frac{m-\|x\|}{\varepsilon}, \frac{mx}{\|x\|}\right) \text{ se } m-\varepsilon \leq \|x\| \leq m \\ T\left(1, \frac{x}{m-\varepsilon}\right) \text{ caso } \|x\| < m-\varepsilon. \end{cases}$$

De modo similar ao Teorema 5.1.5 temos que T^* é contínua e $T^*\overline{B}$ é precompacto. Além disso, se $x \in \partial B$, então $\|x\| = m$ e, portanto,

$$T_\varepsilon^* x = T\left(\frac{mx}{m}, 0\right) = T(x, 0) = 0.$$

Mas isto nos diz que $T\partial B = \{0\} \subset B$. Desta forma, pelo Lema 5.1.6, temos que existe $x \in \overline{B}$, $x(\varepsilon)$ tal que

$$T_\varepsilon^* x = x.$$

Agora, escrevendo $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in I\!N$, e pondo $x_k = x\left(\frac{1}{k}\right)$, e pondo

$$\sigma_k = \begin{cases} k(m - \|x_k\|) \text{ se } m - \frac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq m \\ 1 \text{ para } m < 1 - \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Obtemos então,

$$T_{\frac{1}{k}}^* x = \begin{cases} T\left(\sigma_k, \frac{m\|x\|}{m}\right) \text{ caso } m - \frac{1}{k} \leq \|x\| \leq m \\ T\left(\sigma_k, \frac{x}{1-1/k}\right) \text{ se } \|x\| < m - \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Fazendo k percorrer os naturais, obtemos as seqüências (x_k) contida $\overline{B}$ tal que $T_{1/k}^* x_k = x_k$, $\forall k \in I\!N$ e $(\sigma_k) \subset [0,1]$. Pela compacidade da aplicação T, podemos assumir que a seqüência $\{(\sigma_k, x_k)\}$ converge para $(\sigma, x) \in [0,1] \times \mathcal{B}$. Assim, temos duas situações possíveis:

$$\sigma = 1 \text{ ou } \sigma < 1.$$

Suponha que $\sigma < 1$. Como $\sigma_k \to \sigma$. Então, para k suficientemente grande, obrigatoriamente temos

$$m - \frac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq m$$

pois, caso contrário, teríamos uma infinidade de $\sigma_k = 1$, implicando em $\sigma_k \to 1$. Logo, quando $k \to \infty$, de $m - \frac{1}{k} \leq \|x_k\| \leq m$ chega-se a

$$\|x\| = m.$$

Por outro lado, pela continuidade de T,

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} T^*_{1/k} x_k = \lim_{k\to\infty} T\left(\sigma_k, \frac{mx_k}{\|x_k\|}\right) = T\left(\sigma, \frac{mx}{\|x\|}\right) = T(\sigma, x).$$

Portanto, por hipótese, $\|x\| < m$. Absurdo. Conseqüentemente $\sigma = 1$, ou seja,

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} T\left(\sigma_k, \frac{x_k}{1-\frac{1}{k}}\right) = T(1, x) = T_1 x,$$

como procurávamos. ■

5.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção, Ω será sempre um domínio limitado. A seguir temos algumas desigualdades úteis.

Desigualdade de Young: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Também temos uma variante: Para todo $\varepsilon > 0$ dado,

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + \varepsilon^{\frac{-q}{p}} |b|^q.$$

Desigualdade de Hölder: Dada $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Além disso, temos também a versão generalizada,

$$\int_\Omega |u_1 u_2 ... u_m|\, dx \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_1\|_{p_2} ... \|u_1\|_{p_m},$$

onde $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ e $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, $p_i > 0$.

Desigualdade de interpolação: Segue, como conseqüência da desigualdade de Hölder, para $p \leq q \leq r$ e $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{(1-\lambda)}{r}$,

$$|\Omega|^{-1/p} \|u\|_p \leq |\Omega|^{-1/q} \|u\|_q, \text{ para } u \in L^q(\Omega) \text{ e } p \leq q \text{ e} \tag{5.1}$$

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_r^{1-\lambda}, \text{ para } u \in L^r(\Omega). \tag{5.2}$$

Combinando estas desigualdades, obtemos

$$\|u\|_q \leq \varepsilon \|u\|_r + \varepsilon^{-\mu} \|u\|_p ,$$

sendo $\varepsilon > 0$ e $\mu = \frac{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}$.

Lema 5.2.1. *Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)\,(L^p(\Omega))$, $p < \infty$. Então u_ε converge uniformemente para u no sentido de $L^p_{loc}(\Omega)\,(L^p(\Omega))$. Aqui, u_ε é a regularizada da u.*

Prova. Ver [11]. ■

Antes de introduzirmos o conceito de Espaço de Sobolev, necessitaremos saber o que significa o termo derivada fraca.

Definição 5.2.2 (***Derivadas fracas***). *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice dado. Uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ será chamada de $\alpha-$ésima derivada fraca de u se ela satisfizer*

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,dx \text{ para toda } \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Denotaremos, neste caso, $v = \partial^\alpha u$.

Observações: $i)$ Observe que $\partial^\alpha u$ é *unicamente* determinada a menos de conjuntos de medida nula.

$ii)$ Chamaremos uma função de *fracamente derivável* se todas as suas derivadas fracas de primeira ordem existirem. Analogamente, uma função será *k vezes fracamente derivável* ($k \in \mathbb{N}$) se todas suas derivadas fracas de ordem até k (inclusive!) existem. Denotaremos o espaço das funções k vezes fracamente derivável por $W^k(\Omega)$.

$iii)$ Note que $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. O conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico, o qual mantém a validade da integração por partes.

Lema 5.2.3. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, α um multi-índice arbitrário e suponha que $\partial^\alpha u$ existe. Então, se $dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon$, teremos*

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = (\partial^\alpha u)_\varepsilon(x),$$

onde u_ε é a regularizada da função u.

Prova. Veja [11]. ■

Teorema 5.2.4. *Sejam u e v localmente integráveis em Ω. Então $v = \partial^{\alpha} u$ se, e somente se, existir uma seqüência (u_j) de funções $C^{\infty}(\Omega)$ convergindo para u em $L^1_{loc}(\Omega)$ e também suas derivadas $\partial^{\alpha} u_j$ convergem para v (para cada α, uma v) em $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Prova. A cargo do leitor. ■

Notamos que esta caracterização equivalente para derivadas fracas é muitas vezes tomada como definição para tal conceito e, através deste resultado também, muitos resultados do conceito clássico podem ser estendidos para derivadas fracas. Em particular, vale

$$\partial^{e_i}(uv) = u\partial^{e_i} v + v\partial^{e_i} u, \ \ i = 1, 2, ..., n,$$

onde, naturalmente, u e v pertencem a $W^1(\Omega)$ (no mínimo.), uv e $u\partial^{e_i} v + v\partial^{e_i} u$ estão em $L^1_{loc}(\Omega)$. Além disso, também temos o

Lema 5.2.5. *Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então a função composta $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e*

$$\partial^{e_i}(f \circ u) = f'(u) . \partial^{e_i} u, i = 1, 2, ..., n.$$

Prova. Sejam $u_j \in C^{\infty}(\Omega)$, $j = 1, 2, ...,$ tais que $u_j \to u$ e $\partial^{e_i} u_j \to \partial^{e_i} u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ (Teorema 5.2.4). Tome $\Omega' \subset \Omega$ um compacto qualquer, fixando $x_0 \in \Omega'$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(u_j(x_0)) - f(u(x_0)) = f'(c)(u_j(x_0) - u(x_0)).$$

Mas, como $f \in L^{\infty}$ e, se necessário, redefindo-a, temos que $|f'(c)| \leq \|f'\|_{\infty}$. Portanto,

$$|f(u_j(x_0)) - f(u(x_0))| \leq \|f'\|_{\infty} |u_j(x_0) - u(x_0)|.$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega'} |f \circ u_j(x) - f \circ u(x)|\, dx \leq \|f'\|_\infty \int_{\Omega'} |u_j(x) - u(x)|\, dx \to 0, \text{ quando } j \to \infty,$$

em outras palavras, temos que $\|f \circ u_j - f \circ u\|_{1;\Omega'} \to 0$ e, daí, concluímos que $f \circ u_j \to f \circ u \;\; q.t.p\,(\Omega')$.

Por outro lado,

$$(f' \circ u_j)\, \partial^{e_i} u_j - (f' \circ u)\, \partial^{e_i} u = f' \circ u_j\, (\partial^{e_i} u_j - \partial^{e_i} u) + \partial^{e_i} u\, (f' \circ u_j - f' \circ u),$$

e, desta forma, $\int_{\Omega'} |f'(u_j)\, \partial^{e_i} u_j - f'(u)\, \partial^{e_i} u|\, dx$ fica menor do que ou igual a

$$\|f'\|_\infty \int_{\Omega'} |\partial^{e_i} u_j - \partial^{e_i} u|\, dx + \int_{\Omega'} |f'(u_j) - f'(u)|\, |\partial^{e_i} u|\, dx. \tag{5.3}$$

Mas de $u_j \to u \;\; q.t.p\,(\Omega')$ e de f' ser contínua, $f'(u_j) \to f'(u)\; q.t.p\,(\Omega')$. Logo,

$$f'(u_j)\, \partial^{e_i} u \to f'(u)\, \partial^{e_i} u \;\; q.t.p\,(\Omega'),$$

e, além disso, $|f'(u_j)\, \partial^{e_i} u| \leq \|f'\|_\infty\, |\partial^{e_i} u|$, $\forall j \in I\!N$. Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos,

$$\int_{\Omega'} |f'(u_j) - f'(u)|\, |\partial^{e_i} u|\, dx \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Voltando a (5.3) concluímos que $\|f'(u_j)\, \partial^{e_i} u_j - f'(u)\, \partial^{e_i} u\|_{1;\Omega'} \to 0$ e, daí, que

$$f'(u_j)\, \partial^{e_i} u_j \to f'(u)\, \partial^{e_i} u \;\; q.t.p\,(\Omega').$$

Sendo Ω' arbitrário, segue que o exposto acima é válido para todo subconjunto compacto de Ω.

Agora, dada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ temos, para todo j natural,

$$\int_\Omega f'(u_j)\, (\partial^{e_i} u)\, \varphi dx = -\int_\Omega (f \circ u_j)\, \partial^{e_i} \varphi dx$$

onde, na verdade, as integrais acima são no suporte da φ. Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega f'(u)\, (\partial^{e_i} u)\, \varphi dx = -\int_\Omega (f \circ u)\, \partial^{e_i} \varphi dx,$$

como queríamos provar. ■

Dada uma função $u : \Omega \longrightarrow I\!R$, definimos

- Parte positiva da função u por $u^{+}(x) = max\,\{u(x), 0\}$ e
- Parte negativa da função u por $u^{-}(x) = min\,\{u(x), 0\}$.

Conseqüentemente, temos que $u = u^{+} + u^{-}$ e $|u| = u^{+} - u^{-}$.

Lema 5.2.6. *Seja $u \in W^{1}(\Omega)$, então u^{+}, u^{-} e $|u| \in W^{1}(\Omega)$ e*

$$\partial^{e_i} u^{+}(x) = \begin{cases} \partial^{e_i} u(x) \ \ \textit{se } u(x) > 0 \\ 0 \ \textit{caso } u \leq 0 \end{cases}, \ \partial^{e_i} u^{-}(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{para } u(x) \geq 0 \\ \partial^{e_i} u(x) \ \ \textit{se } u < 0 \end{cases} \quad \textit{e}$$

$$\partial^{e_i} |u|(x) = \begin{cases} \partial^{e_i} u(x) \ \ \textit{se } u(x) > 0 \\ 0 \ \textit{caso } u(x) = 0 \\ -\partial^{e_i} u(x) \ \ \textit{para } u(x) < 0. \end{cases}$$

Prova. Defina, para $\varepsilon > 0$, $f_{\varepsilon} : I\!R \longrightarrow I\!R$ por

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \left(x^{2} + \varepsilon^{2}\right)^{1/2} - \varepsilon \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ par } x \leq 0. \end{cases}$$

Sem grande dificuldade, nota-se que $f_{\varepsilon} \in C^{1}(I\!R)$ seja qual for ε. Agora, considere a composta $f_{\varepsilon} \circ u : \Omega \longrightarrow I\!R$, onde

$$f_{\varepsilon} \circ u(x) = \begin{cases} \left(u^{2} + \varepsilon^{2}\right)^{1/2} - \varepsilon \text{ caso } u(x) > 0 \\ 0 \text{ se } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pelo Lema 5.2.5, $\partial^{e_i}(f_{\varepsilon} \circ u) = f_{\varepsilon}'(u)\,\partial^{e_i} u$. Logo,

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon}'(u)\left(\partial^{e_i} u\right)\varphi dx = -\int_{\Omega} (f_{\varepsilon} \circ u)\,\partial^{e_i}\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_{0}^{1}(\Omega).$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} (f_{\varepsilon} \circ u)\,\partial^{e_i}\varphi dx &= \int_{u \leq 0} f_{\varepsilon}'(u)\left(\partial^{e_i} u\right)\varphi dx + \int_{u > 0} f_{\varepsilon}'(u)\left(\partial^{e_i} u\right)\varphi dx \\ &= \int_{u > 0} \frac{u}{\left(u^{2} + \varepsilon^{2}\right)^{1/2}}\left(\partial^{e_i} u\right)\varphi dx. \end{aligned}$$

Ora, mas $f_{\varepsilon} \circ u \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} u \text{ para } u > 0 \\ 0 \text{ se } u \leq 0 \end{cases} = u^{+}$ e, portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\Omega} (f_{\varepsilon} \circ u)\,\partial^{e_i}\varphi dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega} u^{+}\partial^{e_i}\varphi dx.$$

Por outro lado, para $u > 0$, $\frac{u(\partial^{e_i}u)\varphi}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (\partial^{e_i}u)\,\varphi$. Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada, temos,

$$\int_{u>0} \frac{u\,(\partial^{e_i}u)\,\varphi}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon}dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{u>0} (\partial^{e_i}u)\,\varphi dx,$$

assim, escrevendo de modo conveniente,

$$-\int_{\Omega} u^+ \partial^{e_i}\varphi dx = \int_{u>0} (\partial^{e_i}u)\,\varphi dx + \int_{u\leq 0} 0.\varphi,$$

obtendo que

$$\partial^{e_i}u^+\,(x) = \begin{cases} \partial^{e_i}u\,(x) \text{ caso } u\,(x) > 0 \\ 0 \text{ se } u\,(x) \leq 0. \end{cases}$$

Para o caso u^-, use o fato de que $u^- = -\,(-u)^+$, depois fica fácil verificar o caso $|u|$. ■

LEMA 5.2.7. *Seja $u \in W^1\,(\Omega)$. Então $\partial^{e_i}u = 0$ em quase todo ponto de A, onde A é qualquer conjunto no qual u é constante.*

PROVA. Seja $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ um conjunto no qual $u = c$. Defina, para todo $x \in \Omega$, $\widetilde{u}\,(x) = u\,(x) - c$. Naturalmente, $\widetilde{u} \equiv 0$ em $\widetilde{\Omega}$ e mais, $\widetilde{u} \in W^1\,(\Omega)$. Assim,

$$\partial^{e_i}\widetilde{u} = \partial^{e_i}\widetilde{u}^+ + \partial^{e_i}\widetilde{u}^- = 0 + 0 = 0 \text{ em } \widetilde{\Omega}.$$

Mas,

$$0 = \partial^{e_i}\widetilde{u} = \partial^{e_i}u - \partial^{e_i}c = \partial^{e_i}u \quad q.t.p\left(\widetilde{\Omega}\right)$$

pois se chamarmos $v = \partial^{e_i}c$ e usarmos integração por partes, obteremos que $v = 0$ $q.t.p\left(\widetilde{\Omega}\right)$. ■

DEFINIÇÃO 5.2.8 (***Função Suave por Partes***). *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes se $\forall a, b \in I$, com $a < b$, f deixa de ser contínua em apenas um número finito de pontos de $[a, b]$ e, nestes pontos, existem os limites laterais.*

TEOREMA 5.2.9. *Seja f uma função suave por partes em $\mathbb{R}$ e $f' \in L^\infty\,(\mathbb{R})$. Se $u \in W^1\,(\Omega)$, então $f \circ u \in W^1\,(\Omega)$. Ademais, chamando de L o conjunto dos pontos de descontinuidade de f', temos*

$$\partial^{e_i}\,(f \circ u)\,(x) = \begin{cases} f'\,(u)\,\partial^{e_i}u \text{ para } u\,(x) \notin L \\ 0 \text{ caso } u\,(x) \in L. \end{cases}$$

Prova. Suponha que L seja constituído de apenas um ponto que, por simplicidade, assumiremos ser a origem. Sendo f suave por partes, considere as funções f_1 e $f_2 \in C^1(\mathbb{R})$, $f_1', f_2' \in L^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$f \circ u(x) = \begin{cases} f_1 \circ u(x) \ \text{ caso } u(x) \geq 0 \\ f_2 \circ u(x) \ \text{ se } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Admitindo que $f(0) = 0$ (caso não seja, trabalhe com $g = f - f(0)$), e, como,

$$f \circ u = f_1 \circ u^+ + f_2 \circ u^-,$$

então (note que desta última igualdade concluímos que $f \circ u \in W^1(\Omega)$),

$$\partial^{e_i}(f \circ u) = \partial^{e_i}\left(f_1 \circ u^+\right) + \partial^{e_i}\left(f_2 \circ u^-\right).$$

Por outro lado,

$$\partial^{e_i}(f_1 \circ u^+) = f_1'(u)\,\partial^{e_i}u^+ = \begin{cases} 0 \text{ se } u(x) \leq 0 \\ f'(u)\,\partial^{e_i}u \text{ para } u(x) > 0 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\partial^{e_i}(f_1 \circ u^+) = \begin{cases} f'(u)\,\partial^{e_i}u \text{ caso } u(x) < 0 \\ 0 \text{ se } u(x) \geq 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\partial^{e_i}(f \circ u)(x) = \begin{cases} f'(u)\,\partial^{e_i}u \text{ caso } u(x) \geq 0 \\ 0 \text{ para } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Agora, através de um processo de indução prova-se para um conjunto de pontos de descontinuidade de f' arbitrário. ∎

Definição 5.2.10 (***Espaço*** $W^{k,p}(\Omega)$). *Para $p \geq 1$ e k um inteiro não negativo, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in W^k(\Omega);\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \textit{ para todo } \ |\alpha| \leq k\right\}.$$

Nota: O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real e com a norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$

torna-se um espaço de Banach. Além disso, frequentemente usaremos uma norma equivalente a esta, a saber

$$\|u\|'_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p .$$

Um outro espaço de Banach $W_0^{k,p}(\Omega)$ é obtido tomando-se o fecho de $C_0^k(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Em geral, os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ não coincidem para domínios limitados. O caso $p = 2$ é especial pois $W^{k,2}(\Omega)$ e $W_0^{k,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno

$$< u, v >_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,$$

e, muitas vezes, estes espaços são escritos como $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$, respectivamente. Para uma riqueza maior de detalhes, veja [1].

Proposição 5.2.11. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, $\forall \alpha$ multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$.Aqui, u_ε é a regularizada de u.*

Prova. Sejam $\Omega' \subset\subset \Omega$ um compacto qualquer e α multi-índice também arbitrário, porém fixo. Como $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega')$ e, em particular, $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega')$ e, pelo Lema 5.2.1, temos que

$$\partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u \text{ em } L^p(\Omega') . \tag{5.4}$$

Por outro lado, como $\Omega' \subset\subset \Omega$, então podemos tomar $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que $dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon_0$, $\forall x \in \Omega'$. Agora, usando o Lema 5.2.3, temos

$$(\partial^\alpha u)_{\varepsilon_0}(x) = \partial^\alpha u_{\varepsilon_0}(x), \ \forall x \in \Omega'.$$

Voltando a (5.4), obtemos, para $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u \text{ em } L^p(\Omega') .$$

Sendo α e Ω' arbitrários, segue que

$$\partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u \text{ em } L^p_{loc}(\Omega), \ \forall |\alpha| \leq k,$$

como procurávamos. ■

Teorema 5.2.12. *$C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Prova. Seja $(\Omega_j) \subset\subset \Omega$ tais que $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega$. Considere (ψ_j) contida em $C_0^{\infty}(\Omega)$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $(\Omega_{j+1} - \Omega_{j-1})$, onde $\Omega_0, \Omega_{-1} = \emptyset$.

Dados $u \in W^{k,p}(\Omega)$ um elemento qualquer e $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, ...,$ tais que

$$\begin{aligned} &dist(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}) \geq \varepsilon_j \text{ e} \\ &\left\| (\psi_j u)_{\varepsilon_j} - (\psi_j u) \right\|_{k,p} \leq \tfrac{\varepsilon}{2^j}. \end{aligned}$$

Agora, dado um compacto $\Omega' \subset\subset \Omega$ e escrevendo $v_j = (\psi_j u)_{\varepsilon_j}$, obtemos da primeira desigualdade acima que apenas um número finito dos v_j não são nulos em Ω'. Conseqüentemente, a função $v = \sum_{i=1}^{\infty} v_j \in C^{\infty}(\Omega)$ e, ademais,

$$\|u - v\|_{k,p} = \left\| u \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \psi_j\right) \right\|_{k,p} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \psi_j u - (\psi_j u)_{\varepsilon_j} \right\|_{k,p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon,$$

como queríamos provar. ∎

5.3 Teoremas de Imersão

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de imersão. De especial importância são os resultados de compacidade pois estarão, no futuro, intimamente ligados aos teoremas de ponto fixo.

Teorema 5.3.1.

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) & \text{para } p < n \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{caso } p > n. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $c = c(n,p)$ tal que, para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &\|u\|_{np/(n-p)} \leq c \|Du\|_p \ \text{ se } p < n, \\ &\sup_{\Omega} |u| \leq c |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|Du\|_p \ \text{ para } p > n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Prova. Inicialmente estabeleceremos o resultado em $C_0^1(\Omega)$ e em seguida passando a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Seja $u \in C_0^1(\Omega)$ uma função arbitrária.

Caso $p < n$: Como u tem suporte compacto, então podemos escolher $\widetilde{x}_i \in I\!R$ tal que $u(x_1, x_2, ..., \widetilde{x}_i, ..., x_n) = 0$, sejam quais forem $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ em $I\!R$. Logo, temos que

$$u(x_1, ..., x_i, ..., x_n) - u(x_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., x_n) = \int_{\widetilde{x}_i}^{x_i} \partial_i u dx_i.$$

Portanto,

$$|u(x)| = |u(x) - u(\widetilde{x})| \leq \int_{\widetilde{x}_i}^{x_i} |\partial_i u| \, dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, dx_i,$$

e, assim,

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, dx_i \right)^{1/(n-1)},$$

de modo que integrando a desigualdade acima sobre cada componente x_i e então aplicando a desigualdade de Hölder para $m = p_1 = p_2 = ... = p_m = n-1$, após cada integração, obtemos

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, dx_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\partial_i u| \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla u\|_1 . \quad (5.6)$$

Isto mostra o caso $p = 1$ (a desigualdade! e, conseqüentemente, $C_0^1(\Omega) \subset L^{n/(n-1)}$ também).

A fim de mostrarmos o caso $p < n$ e $p > 1$, volte a desigualdade acima e troque u por $|u|^\gamma$, onde $\gamma > 1$. Note que, como $\gamma > 1$ e u tem derivada, então

$$(\partial_i |u|^\gamma)^2 = \gamma^2 \left(u^{\gamma-1}\right)^2 (\partial_i u)^2,$$

e, portanto,

$$\||u|^\gamma\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla |u|^\gamma\|_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_\Omega |u(x)|^{\gamma-1} |\nabla u| \, dx.$$

Usando o fato de que u tem suporte compacto então $|u|^{\gamma-1}$ e $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$, seja qual for $p \in [1, \infty]$. Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\||u|^\gamma\|_{n/(n-1)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left\||u|^{\gamma-1}\right\|_{p/(p-1)} \|\nabla u\|_p ,$$

isto é,

$$\left(\int_\Omega |u|^{\gamma n/(n-1)}\,dx\right)^{(n-1)/n} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)p/(p-1)}\,dx\right)^{(p-1)/p} \|\nabla u\|_p\,.$$

Escolhendo $\gamma > 1$ de modo que $\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}$ $\left(\text{ou seja, } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p}\right)$ temos da desigualdade acima

$$\|u\|_{np/(n-p)} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_p\,,$$

como procurávamos.

Caso $p > n$: Assuma que $|\Omega| = 1$ e defina $\widetilde{u} = \frac{\sqrt{n}|u|}{\|\nabla u\|_p}$. Usando a desigualdade (5.6) para $\widetilde{u}^\gamma$, então, para $n' = \frac{n}{n-1}$ e $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\|\widetilde{u}^\gamma\|_{n'} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla \widetilde{u}^\gamma\|_1 = \frac{(\sqrt{n})^\gamma}{\sqrt{n}}\frac{1}{\|\nabla u\|_p^\gamma}\|\nabla\,|u|^\gamma\|_1 \le \gamma\left\|\widetilde{u}^{\gamma-1}\right\|_{p'}\,. \tag{5.7}$$

Mas, como

$$\left(\int_\Omega |\widetilde{u}|^{\gamma n'}\,dx\right)^{1/n'} = \left(\int_\Omega |\widetilde{u}|^{\gamma n'}\,dx\right)^{\gamma/(\gamma n')} = \|\widetilde{u}\|_{\gamma n'}^\gamma \text{ e}$$

$$\left(\int_\Omega |\widetilde{u}|^{(\gamma-1)p'}\,dx\right)^{1/p'} = \|\widetilde{u}\|_{(\gamma-1)p'}^{(\gamma-1)}\,,$$

a desigualdade (5.7) fica (lembre-se que $|\Omega| = 1$),

$$\|\widetilde{u}\|_{n'\gamma} \le \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|\widetilde{u}\|_{(\gamma-1)p'}^{1-\frac{1}{\gamma}} \le \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|\widetilde{u}\|_{\gamma p'}^{1-\frac{1}{\gamma}}\,.$$

Agora, como $p > n$, então $\frac{n'}{p'} = \delta > 1$. Substituindo γ por δ^j, $j = 1, 2, 3, ...$, na desigualdade acima, temos

$$\|\widetilde{u}\|_{n'\delta^j} \le \left(\delta^j\right)^{\frac{1}{\delta^j}}\|\widetilde{u}\|_{n'\delta^j-1}^{1-\delta^{-j}}\,,\ j = 1, 2, ...$$

Iterando a partir de $j = 1$ e usando a desigualdade (5.6),

$$\|\widetilde{u}\|_{\delta^j} \le \delta^{\sum_{j=1}^\infty j\delta^{-j}} = \beta,$$

onde β é uma constante independente de $\widetilde{u}$ (Note que a série acima é convergente). Impondo que $j \to \infty$ temos (veja o problema 7.1, pág. 163, de [11])

$$\sup_\Omega |\widetilde{u}| \le \beta$$

e daí,

$$\frac{\sqrt{n}}{\|\nabla u\|_p} \sup_{\Omega} |u| \leq \beta \Rightarrow \sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\beta}{\sqrt{n}} \|\nabla u\|_p$$

e, com isto, chegamos ao procurado para $|\Omega| = 1$. A fim de eliminarmos esta última restrição, considere a transformação $y_i = |\Omega|^{1/n} x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, e obtenha

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\beta}{\sqrt{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p .$$

Lembrando agora que o demonstrado acima foi considerando que $u \in C_0^1(\Omega)$, passemos então ao caso geral. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qualquer e tome $(u_j) \subset C_0^1(\Omega)$ tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ (Teorema 5.2.12). Aplicando as estimativas (5.5) para $u_j - u_l$, vemos, sem a menor dificuldade, que (u_j) é uma seqüência de Cauchy em $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ se $p < n$ ou, em $C^0(\overline{\Omega})$ se $p > n$. Conseqüentemente u estará no respectivo espaço desejado (depende de p e n) e naturalmente as desigualdades serão satisfeitas. ■

Definição 5.3.2 (***Continuamente imerso***). *Um espaço de Banach $\mathcal{B}_1$ é dito continuamente imerso em um espaço de Banach $\mathcal{B}_2$ se existe uma transformação $T : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ linear, injetiva e limitada. Denotaremos $\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$.*

Observação: Tome $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por $Iv = v$. Temos que I é linear, injetiva e limitada. Logo, o teorema precedente nos mostra que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) \text{ ou} \\ C^0\left(\overline{\Omega}\right) \end{cases} \quad \text{dependendo de } p \text{ e } n.$$

Corolário 5.3.3.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \longrightarrow \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) \;\; \textit{se } kp < n \textit{ ou} \\ C^m\left(\overline{\Omega}\right) \;\; \textit{para } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

Prova. Use o Teorema 5.3.1 k vezes. Mais detalhes em [11]. ■

De um modo geral, $W_0^{k,p}(\Omega)$ não pode ser substituído por $W^{k,p}(\Omega)$. No entanto, poderemos fazer esta troca caso Ω satisfaça o que se chama de *condição uniforme de cone interior*, ou seja, que exista um cone fixo K_Ω tal que cada

$x \in \partial\Omega$ é o vértice de um cone $K_\Omega(x) \subset \overline{\Omega}$ congruente a K_Ω. Neste caso então, podemos dizer que

$$W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow \begin{cases} L^{np/(n-kp)}(\Omega) \text{ caso } kp < n \text{ ou} \\ C^m\left(\overline{\Omega}\right) \text{ se } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

Ao leitor interessado em mais detalhes, veja [1].

DEFINIÇÃO 5.3.4 (***Compactamente imerso***). *Seja $\mathcal{B}_1$ um espaço de Banach continuamente imerso em $\mathcal{B}_2$, também Banach. Diremos que $\mathcal{B}_1$ está compactamente imerso em $\mathcal{B}_2$ se o operador de imersão I for compacto. Denotaremos por $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{c} \mathcal{B}_2$.*

TEOREMA 5.3.5. *Sejam Ω um domínio limitado cuja fronteira é C^m e u uma função em $W^{k,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 \leq p, r \leq \infty$. Para qualquer inteiro j, $0 \leq j < k$, e para qualquer número λ no intervalo $\frac{j}{k} \leq \lambda \leq 1$, seja q tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{n} + \lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{k}{n}\right) + (1-\lambda)\frac{1}{r}.$$

*Se $k - j - \frac{n}{p}$ **não** for um inteiro não-negativo, então*

$$\|\partial_j u\|_{0,q} \leq c\left(\|u\|_{k,p}\right)^{\lambda}\left(\|u\|_{0,r}\right)^{1-\lambda}.$$

Se $k - j - \frac{n}{p}$ for um inteiro não-negativo, então a desigualdade acima é válida para $\lambda = \frac{j}{k}$. A constante c depende apenas de $\Omega, r, p, k, j, \lambda$.

PROVA. Ver [10]. ∎

Agora, considere $\mu \in (0,1)$ e defina o operador V_μ em $L^1(\Omega)$ por

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)\, dy.$$

Como facilmente se percebe, V_μ está bem definido e leva $L^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$.

LEMA 5.3.6. *O operador V_μ leva $L^p(\Omega)$ continuamente em $L^q(\Omega)$ para qualquer q, $1 \leq q \leq \infty$, satisfazendo*

$$0 \leq \delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu.$$

Ademais, para qualquer $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|V_\mu f\|_q \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p . \tag{5.8}$$

Prova. Ver [11]. ∎

Lema 5.3.7. *Seja* Ω *convexo e* $u \in W^{1,1}(\Omega)$. *Então*

$$|u(x) - u_\Omega| \leq \frac{d^n}{n|\Omega|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\, dy \;\; q.t.p\,(\Omega), \tag{5.9}$$

onde $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ *e* $d = diam\ \Omega$.

Prova. Veja [11]. ∎

Teorema 5.3.8. *Seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. *Então* $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, *sendo que* $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. *Ademais, para qualquer bola* $B = B_R$, *vale*

$$\underset{\Omega\cap B_R}{osc}\ u \leq cR^\gamma \|\nabla u\|_p ,$$

com $c = c(n,p)$.

Prova. Como $p > n$ e escolhendo $\mu = \frac{1}{n}$, $q = \infty$ e $\Omega = B$ na desigualdade (5.8) temos

$$\left\|V_{1/n}|\nabla u|\right\|_\infty \leq \left(\frac{1-\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\right)^{1-1/n} \omega_n^{1-1/n} |B|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p ,$$

isto é,

$$\sup_{\Omega\cap B} \int_{\Omega\cap B} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\, dy \leq a(n,p)\, \omega_n^{1-\frac{1}{n}} (R^n)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \omega_n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p$$

e, daí,

$$\frac{(2R)^n}{n\omega_n R^n} \sup_{\Omega\cap B} \int_{\Omega\cap B_R} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)|\, dy \leq b(n,p)\, R^\gamma \|\nabla u\|_p .$$

Agora, usando a desigualdade (5.9) encontramos,

$$|u(x) - u_{\Omega\cap B}| \leq c(n,p)\, R^\gamma \|\nabla u\|_p \;\; q.t.p\,(\Omega\cap B).$$

Mas, dados $x, y \in \Omega\cap B$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{\Omega\cap B}| + |u_{\Omega\cap B} - u(y)| \leq \widetilde{c}(n,p)\, R^\gamma \|\nabla u\|_p .$$

Seguindo, imediatamente, o resultado. ∎

Teorema 5.3.9. *Os espaços* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *estão compactamente imersos em*

1) $L^q(\Omega)$ *para qualquer* $q < np/(n-p)$, *se* $p < n$, *e*

2) *em* $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, *se* $p > n$.

Prova. Iniciaremos pelo item 1). Basta mostrarmos que conjuntos limitados em $W_0^{1,p}(\Omega)$ são precompactos em $L^q(\Omega)$. Suponha $q = 1$ e seja A um conjunto limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sem perda de generalidade, admitamos que $A \subset C_0^1(\Omega)$ e que $\|u\|_{1,p,0} \leq 1$ para toda $u \in A$.

Seja $\varepsilon > 0$. Defina $A_\varepsilon = \{u_\varepsilon; u \in A\}$, onde u_ε é a regularizada de u. Por comodidade, lembramos que

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int_\Omega \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\,dy.$$

Afirmo que A_ε é precompacto. Vejamos.

Tome $u \in A$, daí

$$|u_\varepsilon(x)| = \int_{|z|\leq 1}|\varphi(z)|\,|u(x-\varepsilon z)|\,dz \leq \|\varphi\|_\infty\|u\|_1$$

e

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \int_{|z|\leq 1}|\nabla\varphi(x)|\,|u(x-\varepsilon z)|\,dz \leq \|\nabla\varphi\|_\infty\|u\|_1 .$$

A primeira desigualdade nos mostra que A_ε é limitado e a segunda, através do Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x_1) - u_\varepsilon(x_2)| &= \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x)\right||x_1 - x_2| \leq |\nabla u_\varepsilon(x)|^2|x_1 - x_2| \\ &\leq \|\nabla\varphi\|_\infty^2 . \|u\|_1^2|x_1 - x_2| .\end{aligned}$$

Portanto, se tomarmos a distância entre x_1 e x_2 suficientemente pequena, vemos que A_ε é um conjunto equicontínuo de funções. Ora, A_ε é limitado e equicontínuo, logo pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, qualquer seqüência em A_ε possuirá uma subseqüência convergente em $\overline{A_\varepsilon}$. Fica caracterizado então que A_ε é precompacto em $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ (e portanto em $L^1(\Omega)$). Agora estamos em condições de estimar para u.

$$\begin{aligned}|u(x) - u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{|z|\leq 1}\varphi(z)\,|u(x) - u(x-\varepsilon z)|\,dz \\ &\leq \int_{|z|\leq 1}\varphi(z)\int_0^{\varepsilon|z|}|\partial_r u(x - r\omega)|\,drdz,\ \omega = \frac{z}{|z|}.\end{aligned}$$

Integrando sobre x,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left|u(x)-u_{\varepsilon}(x)\right|dx &\leq \int_{\Omega}\int_{|z|\leq 1}\varphi(z)\int_{0}^{\varepsilon|z|}\left|\partial_{r}u(x-r\omega)\right|drdzdx\\ &\leq \varepsilon\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|dx\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Isto é

$$\left\|u-u_{\varepsilon}\right\|_{1}\leq\varepsilon.$$

Assim,

$$\left\|u\right\|_{1}\leq\left\|u-u_{\varepsilon}\right\|_{1}+\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{1}\leq\varepsilon+m\to m \text{ quando } \varepsilon\to 0,$$

onde $m>0$ é um limitante para A_{ε}. Logo A é limitado em $L^{1}(\Omega)$. Além disso, de

$$\left|\nabla u_{\varepsilon}(x)\right|\leq\left\|\nabla\varphi\right\|_{\infty}.\left\|u\right\|_{1}\leq\left\|\nabla\varphi\right\|_{\infty}.m$$

onde m é também um limitante para A (basta tomar o maior dentre os limitantes de A_{ε} e A). Fazendo $\varepsilon\to 0$ na desigualdade acima obtemos,

$$\left|\nabla u(x)\right|\leq\left\|\nabla\varphi\right\|_{\infty}.m,$$

e pelo mesmo argumento precedente, A é equicontínuo em $C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$ e portanto, A é precompacto em $L^{1}(\Omega)$, finalizando o caso $q=1$.

Para $p<n$ e $q<\frac{np}{n-p}$ arbitrários, porém fixos, usaremos a desigualdade (5.2). Fazendo $p=1$ e $r=\frac{np}{n-p}$ nesta desigualdade obtemos,

$$\left\|u\right\|_{q}\leq\left\|u\right\|_{1}^{\lambda}\left\|u\right\|_{np/(n-p)}^{1-\lambda}\leq\left\|u\right\|_{1}^{\lambda}\left(c\left\|\nabla u\right\|_{p}\right)^{1-\lambda},$$

onde esta última desigualdade é devido ao Teorema 5.3.5 e $\frac{1}{q}=\lambda+\frac{(1-\lambda)(n-p)}{np}$. Assim, tomando um conjunto A limitado em $W_{0}^{1,p}(\Omega)$ e usando esta desigualdade provada acima chega-se, através do Teorema de Ascoli-Arzelá, que A é precompacto em $L^{q}(\Omega)$, $q>1$. Como queríamos.

Para provar o caso 2), use o Teorema 5.3.8 para concluir que uma família limitada $A\subset W_{0}^{1,p}(\Omega)$ é equicontínua em $C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$. Aplique o Teorema de Ascoli-Arzelá a esta família e conclua que ela é precompacta em $C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$. ■

Uma extensão do teorema acima mostra que são válidas as imersões,

$$W_0^{k,p}(\Omega) \xrightarrow{c} \begin{cases} L^q(\Omega) \text{ para } kp < n, q < \frac{np}{n-kp} \\ C^m\left(\overline{\Omega}\right) \text{ caso } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases}.$$

Além disso, se o conjunto Ω for suficientemente regular (condição de cone) pode-se substituir $W_0^{k,p}(\Omega)$ por $W^{k,p}(\Omega)$. Além destes resultados citados acima, necessitaremos do seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

Teorema 5.3.10. *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega$ em C^1 no mínimo. Seja $1 \leq p < \infty$ e j, k inteiros satisfazendo $0 \leq j < k$. Se $q \geq 1$ é um número qualquer satisfazendo*

$$\frac{1}{q} > \frac{j}{n} + \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

então temos que $W^{k,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega)$.

Capítulo 6

SOBRE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DO TIPO $\mathcal{L}u = f\left(x, u, \nabla u\right)$

Trataremos, neste capítulo, de garantir solubilidade para problemas quasilineares elípticos. Na seção 6.1, $\mathcal{L}$ assumirá a forma de Δ enquanto que, na seção 6.2, $\mathcal{L}$ terá a forma de $-\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$, com restrições a serem esclarecidas posteriormente.

6.1 A Equação $\Delta u = f\left(x, u, \nabla u\right)$ $(p > n)$

Nesta seção, guiados por [20], utilizaremos do método de sub-supersolução para expor uma teoria de solubilidade do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f\left(x, u, \nabla u\right) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $I\!R^n$, com fronteira suficientemente suave, u deverá pertencer a $W^{2,p}\left(\Omega\right)$ e a função fronteira φ é o traço $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$ de uma função $\widetilde{\varphi} \in W^{2,p}\left(\Omega\right)$, isto é, $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}\left(\partial\Omega\right)$ e vale $\left\|\varphi\right\|'_{2-\frac{1}{p},p} \leq c_0\left\|\widetilde{\varphi}\right\|_{2,p}$, sendo que c_0 não depende de $\widetilde{\varphi}$. Lembramos, ainda, que nesta seção $p > n$. Iniciaremos procurando uma estimativa para soluções $W^{2,p}\left(\Omega\right)$ de (6.1) e, em seguida, procuraremos assegurar a existência de tal solução.

OBSERVAÇÃO: A expressão $\|\varphi\|'_{2-\frac{1}{p},p}$ é calculada na fronteira de Ω. Este é o motivo pelo qual aparece o "expoente linha". Como não haverá perigo de confusão, doravante denotaremos esta expressão simplesmente por $\|\varphi\|'$. Aproveitando a pausa, gostaríamos de avisar que quando escrevermos $\|\nabla u\|_\infty$ estaremos, na verdade, querendo dizer $\||\nabla u|\|_\infty$.

6.1.1 Uma Estimativa A-priori

Além do já dito acima, estaremos admitindo que f satisfaz as seguintes condições,

[F.1] f é uma função definida em $\Omega \times I\!R \times I\!R^n$ com valores em $I\!R$ e satisfaz as condições de Carathéodory, ou seja, f é uma função mensurável com relação a x seja qual for $(s, \xi) \in I\!R \times I\!R^n$ fixo e é uma função contínua com relação a (s, ξ) para quase todo $x \in \Omega$.

[F.2] Além disso, teremos satisfeito que

$$|f(x, s, \xi)| \leq b(x, s)(1 + |\xi|^\alpha)$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $(s, \xi) \in I\!R \times I\!R^n$, $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$ e b é Carathéodory tal que, para qualquer $l > 0$ fixo,

$$b_l(.) = \sup_{|s| \leq l} b(., s) \in L^p(\Omega).$$

Suponha que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ seja uma solução de (6.1), com $\|u\|_\infty \leq M$ (u está em $L^\infty(\Omega)$ pelo Teorema de Imersão de Sobolev). Assim,

$$\Delta u = f(x, u, \nabla u) = \frac{f(x, u, \nabla u)}{1 + |\nabla u|^\alpha}(1 + |\nabla u|^\alpha).$$

Lembrando que $b_M(.) = \sup_{|s| \leq M} b(., s) \in L^p(\Omega)$ e escrevendo

$$\Delta u - b_M(x)u = \frac{f(x, u, \nabla u)}{1 + |\nabla u|^\alpha}(1 + |\nabla u|^\alpha) - b_M(x)u,$$

temos que a função u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u - b_M(x)\,u = f_1(x)\,|\nabla u|^{\alpha} + f_0(x) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $f_1(x) = \frac{f(x,u(x),\nabla u(x))}{1+|\nabla u(x)|^{\alpha}}$ e $f_0(x) = f_1(x) - b_M(x)\,u(x)$, ambas em $L^p(\Omega)$.

A fim de tornar mais claro nosso objetivo nesta primeira etapa, temos como alvo estimar a quantidade $\|u\|_{2,p}$ em termos de limitantes superiores para as quantidades $\|u\|_{\infty}$, $\|f_1\|_p$, $\|f_0\|_p$ e $\|\varphi\|'$. Para fazer isto, necessitaremos do

Lema 6.1.1. *Para qualquer $t \in [0,1]$ fixo, o problema*

$$\begin{cases} \Delta v - b_M(x)\,v = f_1(x)\,|\nabla v|^{\alpha} + t f_0(x) \text{ em } \Omega \\ v = t\varphi \text{ na } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.3}$$

possui no máximo uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$. Aqui, f_1 e f_0 como acima.

Prova. De modo padrão, suponha que para algum $t_0 \in [0,1]$ tenhamos v, z, em $W^{2,p}(\Omega)$, soluções de (6.3). Fazendo $w = v - z \in W^{2,p}(\Omega)$ temos que

$$\begin{cases} \Delta w - b_M(x)\,w = f_1(x)\left[|\nabla v|^{\alpha} - |\nabla z|^{\alpha}\right] \text{ em } \Omega \\ w = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

No entanto, da igualdade $|\nabla v|^{\alpha} - |\nabla z|^{\alpha} = |\nabla w + \nabla z|^{\alpha} - |\nabla z|^{\alpha}$ temos um motivador para definir, para cada $x \in \Omega$ fixo, a função $g : [0,1] \longrightarrow I\!R$ de modo que $g(\tau) = |\tau \nabla w(x) + \nabla z(x)|^{\alpha}$ pois, com isso, teremos que,

$$g(1) - g(0) = |\nabla w + \nabla z|^{\alpha} - |\nabla z|^{\alpha},$$

e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\tau)\,d\tau.$$

Mas, sem a menor dificuldade, verifica-se que

$$g'(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ para } \sum\limits_{k=1}^{n} (\tau\partial_k w + \partial_k z)^2(x) = 0 \\ \alpha \left[\sum\limits_{k=1}^{n} (\tau\partial_k w + \partial_k z)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[(\tau\partial_i w + \partial_i z)\,\partial_i w\right](x) \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g'(\tau)\, d\tau &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^1\left[\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}(\tau\partial_k w+\partial_k z)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}(\tau\partial_i w+\partial_i z)(x)\right]d\tau\,\partial_i w(x)\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\,\partial_i w(x)\end{aligned}$$

onde $h_i(x) = \int_0^1 H_i(x,\tau)\, d\tau$ e $H_i(x,\tau)$ é o colchetes acima. Perceba que h_i está em $L^\infty(\Omega)$. Resumindo, temos que w satisfaz

$$\begin{cases}\Delta w - b_M(x)\, w = f_1(x)\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(x)\,\partial_i w(x) \text{ em } \Omega\\ w = 0 \text{ na } \partial\Omega,\end{cases}$$

e o motivo pelo qual toda explanação anterior foi feita é o de que procuramos justificar, juntamente com os fatos de que $b_M \geq 0$, $b_M \in L^p(\Omega)$, $f_1 \in L^p(\Omega)$ e $h_i \in L^\infty(\Omega)$, o uso do Teorema de Máximo de [3]. Aplicando-o segue que $w \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $v = z$, finalizando o resultado. ■

Observação: Note que não necessariamente temos que $t \in [0,1]$. No entanto, consideramos este caso pois é o que interessa.

Antes de passarmos ao próximo lema, considere v_1 e $v_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ soluções de (6.3) com parâmetros t_1 e t_2 ($> t_1$), respectivamente. Escrevendo $\widetilde{v} = v_2 - v_1$ (em $W^{2,p}(\Omega)$), então $\widetilde{v}$ satisfaz,

$$\Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v} = f_1(x)\left[|\nabla v_2|^\alpha - |\nabla v_1|^\alpha\right] + (t_2 - t_1)\, f_0(x) \text{ em } \Omega.$$

De modo similar ao feito no Lema anterior, vale

$$\begin{cases}\Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v} = f_1(x)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\widetilde{h}_i(x)\,\partial_i\widetilde{v}(x)\right) + (t_2 - t_1)\, f_0(x) \text{ em } \Omega\\ \widetilde{v} = (t_2 - t_1)\,\varphi \text{ na } \partial\Omega,\end{cases}$$

onde $\widetilde{h}_i(x) = \int_0^1 \widetilde{H}_i(x,\tau)\, d\tau$, com

$$\widetilde{H}_i(x,\tau) = \begin{cases} 0, \text{ para } \sum\limits_{k=1}^{n}(\tau\partial_k\widetilde{v}+\partial_k v_1)^2 = 0\\ \alpha\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(\tau\partial_k\widetilde{v}+\partial_k v_1)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(\tau\partial_i\widetilde{v}+\partial_i v_1)\,\partial_i\widetilde{v}\right](x), \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

Podemos, então, passar ao

Lema 6.1.2. *Se v_1 e v_2 estão nas condições citadas acima, então*

$$\|v_2 - v_1\|_\infty \leq (t_2 - t_1)\left(1 + \|u\|_\infty\right).$$

Prova. Chamemos $K = (t_2 - t_1)\left(1 + \|u\|_\infty\right)$ e considere a função $\omega = \widetilde{v} - K$. Ela satisfaz

$$\begin{cases} \Delta\omega - b_M(x)\,\omega = f_1(x)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\widetilde{h}_i \partial_i \omega\right) + (t_2 - t_1) f_0 + b_M(x) K \text{ em } \Omega \\ \omega = (t_2 - t_1)\varphi - K \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1) f_0 + b_M(x) K &= (t_2 - t_1) f_0 + (t_2 - t_1)\left(b_M(x) + b_M(x)\|u\|_\infty\right) \\ &= (t_2 - t_1)\left[f_0 + b_M(x) + b_M(x)\|u\|_\infty\right] \\ &= (t_2 - t_1)\left[f_1 - b_M(x) u + b_M(x) + b_M(x)\|u\|_\infty\right] \\ &= (t_2 - t_1)\left[b_M(x)\left(\|u\|_\infty - u\right) + b_M(x) + f_1\right] \geq 0 \end{aligned}$$

pois $-f_1(x) = \frac{-f(x,u,\nabla u)}{1+|\nabla u|^\alpha} \leq \left[b_M(x)\left(\|u\|_\infty - u(x)\right) + b_M(x)\right]$. Além disso, na $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \widetilde{v} - K &= (t_2 - t_1)\varphi - (t_2 - t_1)\left(1 + \|u\|_\infty\right) \\ &= (t_2 - t_1)\left(\varphi - 1 - \|u\|_\infty\right) \leq (t_2 - t_1)\left(\varphi - \|u\|_\infty\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Novamente, pelo princípio do máximo de [3], segue que $\widetilde{v} - K \leq 0$ em Ω, ou equivalentemente, $\widetilde{v} \leq K$ em Ω. Analogamente, mostra-se que $-K \leq \widetilde{v}$ em Ω. ■

Agora, estamos em condições de provar o

Teorema 6.1.3. *Seja $M > 0$ e suponha que as condições $[F.1]$ e $[F.2]$ sejam satisfeitas para algum $p > n$. Então existe uma função $\psi : I\!R^3_+ \longrightarrow I\!R_+$, limitada em todo compacto, tal que, para qualquer solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$ do problema (6.1) que satisfaça $\|u\|_\infty \leq M$, valha*

$$\|u\|_{2,p} \leq \psi\left(M, \|b_M\|_p, \|\varphi\|'\right). \tag{6.4}$$

Lembramos que $I\!R_+ = \{t \in I\!R;\ t \geq 0\}$.

Prova. Seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$ uma solução de (6.1), com $\|u\|_\infty \leq M$. Considere a família de problemas

$$\begin{cases} \Delta v - b_M(x)\, v = f_1(x)\, |\nabla v|^\alpha + t f_0(x) \text{ em } \Omega \\ v = t\varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.5}$$

onde nos interessa que $t \in [0,1]$ e f_1 e f_0 são como na parte que precede o Lema 6.1.1. Sejam v_1 e $v_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ soluções de (6.5) com parâmetros t_1 e t_2 $(> t_1)$, respectivamente. Pelo Lema 6.1.2 temos que

$$\|\widetilde{v}\|_p \leq (t_2 - t_1)\,(1 + \|u\|_\infty),$$

onde $\widetilde{v} = v_2 - v_1$. Por outro lado, $\widetilde{v}$ satisfaz,

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v} = f_1(x)\left[|\nabla v_2|^\alpha - |\nabla v_1|^\alpha\right] + (t_2 - t_1)\, f_0(x) \text{ em } \Omega \\ \widetilde{v} = (t_2 - t_1)\,\varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

portanto, em Ω, para $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\|\Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v}\|_p \leq 2^{\alpha-1}\|f_1\|_p \|\nabla\widetilde{v}\|_\infty^\alpha + 2^\alpha \|f_1\|_p \|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + (t_2 - t_1)\|f_0\|_p$$

e, na $\partial\Omega$,

$$\|\widetilde{v}\|' \leq (t_2 - t_1)\,\|\varphi\|'.$$

Do Teorema 5.3.5 aplicado a funções de $W^{2,p}(\Omega)$ obtemos, sem a menor dificuldade, que

$$\|\nabla\widetilde{v}\|_\infty \leq c_1 \|\widetilde{v}\|_{2,p}^\lambda \|\widetilde{v}\|_\infty^{1-\lambda}$$

com $\lambda = \alpha^{-1}$ e a constante $c_1 = c_1(\Omega, n, p)$. Além disso, usaremos a desigualdade para operadores elípticos que, neste nosso caso, toma a forma

$$\|\widetilde{v}\|_{2,p} \leq c_2\left(\|\Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v}\|_p + \|\varphi\|'\right),$$

com $c_2 = c_2\left(\Omega, p, n, \|b_M\|_p\right)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{v}\|_{2,p} &\leq c_2\|\Delta\widetilde{v} - b_M(x)\,\widetilde{v}\|_p + c_2\|\varphi\|' \\ &\leq 2^{\alpha-1}c_2\|f_1\|_p\|\nabla\widetilde{v}\|_\infty^\alpha + 2^\alpha c_2\|f_1\|_p\|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + (t_2 - t_1)\,c_2\|f_0\|_p + c_2\|\varphi\|' \\ &\leq 2^{\alpha-1}c_2\|f_1\|_p\, c_1^\alpha\|\widetilde{v}\|_{2,p}\|\widetilde{v}\|_\infty^{\alpha-1} + 2^\alpha c_2\|f_1\|_p\|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right) \\ &\leq 2^{\alpha-1}c_2\|f_1\|_p\, c_1^\alpha\|\widetilde{v}\|_{2,p} K^{\alpha-1} + 2^\alpha c_2\|f_1\|_p\|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right), \end{aligned}$$

e, como $K = (t_2 - t_1)(1 + \|u\|_\infty)$, temos que $K^{\alpha-1} \leq (t_2 - t_1)^{\alpha-1}(1+M)^{\alpha-1}$. De modo que se substituírmos acima e isolarmos $\|\widetilde{v}\|_{2,p}$, obtemos que,

$$\|\widetilde{v}\|_{2,p}\left(1 - 2^{\alpha-1}c_2c_1^\alpha \|f_1\|_p (1+M)^{\alpha-1}(t_2-t_1)^{\alpha-1}\right)$$

é menor do que ou igual a

$$2^\alpha c_2 \|f_1\|_p \|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right).$$

Impondo que $0 < t_2 - t_1 \leq h$, com $h = \left(c_2\|f_1\|_p\right)^{-1/(\alpha-1)}(1+M)^{-1}(2c_1)^{-\alpha/(\alpha-1)}$ temos que o lado esquerdo da desigualdade referida acima é maior ou igual a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}\|_{2,p}$$

e, conseqüentemente,

$$\|\widetilde{v}\|_{2,p} \leq 2^{\alpha+1}c_2\|f_1\|_p\|\nabla v_1\|_\infty^\alpha + 2c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right). \tag{6.6}$$

Agora, lembramos que da imersão $W^{2,p}(\Omega) \longrightarrow C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ temos a desigualdade,

$$\|\nabla v\|_\infty \leq c_3\|v\|_{2,p}$$

com a constante c_3 não dependendo de v, escrevendo $t_{j-1} = t_1$ e $t_j = t_2$, $v_{j-1} = v_1$ e $v_j = v_2$ obtemos de (6.6) que

$$\|v_j\|_{2,p} \leq 2^{\alpha+1}c_2\|f_1\|_p\|\nabla v_{j-1}\|_\infty^\alpha + 2c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right) + \|v_{j-1}\|_{2,p}, \tag{6.7}$$

com $t_{j-1}, t_j \in [0,1]$, $0 < t_j - t_{j-1} \leq h$. Portanto, pelo fato de que h não depende da escolha particular de t_{j-1} e t_j e da desigualdade de imersão acima, após finitas iterações (ver observação abaixo) obtemos a função ψ, juntamente com a desigualdade (6.4). ■

Observação: Ilustraremos o processo supondo $h = 1/2$.

Iniciemos o processo iterativo:

1) $t_0 = 0$ $(v_0 = 0)$ e $t_1 = h$ (v_1) : Neste passo temos, de (6.7), que

$$\|v_1\|_{2,p} \leq 2c_2\left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right) = A. \tag{6.8}$$

2) $t_1 = h \ \ (v_1)$ e $t_2 = 1 \ \ (u)$: Neste passo temos, de (6.7), que

$$\|u\|_{2,p} \leq 2^{\mu+1} c_2 \|f_1\|_p \|\nabla v_1\|_\infty^\mu + 2c_2 \left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right) + \|v_1\|_{2,p} .$$

Usando a desigualdade de imersão, $\|\nabla v\|_\infty \leq c_3 \|v\|_{2,p}$, temos da expressão acima

$$\|u\|_{2,p} \leq 2^{\mu+1} c_2 \|f_1\|_p c_3^\mu \|v_1\|_{2,p}^\mu + 2c_2 \left(\|f_0\|_p + \|\varphi\|'\right) + \|v_1\|_{2,p} ,$$

e agora, utilizando (6.8) obtemos

$$\|u\|_{2,p} \leq 2^{\mu+1} c_2 \|f_1\|_p c_3^\mu A^\mu + 2A,$$

obtendo a função ψ e a desigualdade procuradas.

6.1.2 O Índice $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$

Nesta subseção mostraremos que o índice α não pode ser trocado por uma condição do tipo $\alpha > 2 - \frac{n}{p}$. Para este fim, consideraremos um contraexemplo.

Sejam $n = 1$, $\Omega = [0, 1] \subset I\!R$ e

$$\begin{cases} \Delta u = b(x) |\nabla u|^\alpha \text{ em } \Omega \\ u(0) = 0 \text{ e } u(1) = (1+\varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma, \end{cases}$$

com $b(x) = \gamma^{1-\alpha} (\gamma - 1) (x + \varepsilon)^{\gamma - 2 - \alpha(\gamma - 1)}$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ e $\alpha > 2 - \frac{1}{p}$. Note também que $\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2}$ e $\nabla u = \frac{du}{dx}$.

Pela teoria de EDO, temos que este problema possui uma única solução, a saber

$$u_\varepsilon(x) = (x + \varepsilon)^\gamma - \varepsilon^\gamma.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|b\|_p &= \left(\int_0^1 |b(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \gamma^{1-\alpha} (1 - \gamma) \left(\int_0^1 (x + \varepsilon)^{[\gamma - 2 - \alpha(\gamma - 1)]p} \, dx\right)^{1/p} \\ &= \gamma^{1-\alpha} (1 - \gamma) \left| \frac{(1+\varepsilon)^\alpha - \varepsilon^\alpha}{\beta} \right|^{1/p}, \end{aligned}$$

sendo $\beta = [\gamma - 2 - \alpha(\gamma - 1) p + 1]$. Assim, para $\beta > 0$, isto é, para $\alpha > \frac{2 - \frac{1}{p} - \gamma}{1 - \gamma}$ e para os valores dos parâmetros indicados acima

$$\|b\|_p = \frac{\gamma^{1-\alpha}}{\beta^{1/p}} (\gamma - 1) \left[(1+\varepsilon)^\beta - \varepsilon^\beta\right]^{1/p} \leq \gamma^{1-\alpha} 2^{\beta/p} \beta^{-1/p}$$

pois $(1+\varepsilon)^{\beta} \leq 2^{\beta} \leq 2^{\beta} + \varepsilon^{\beta}$.

A função $\widetilde{\varphi}(x) = [(1+\varepsilon)^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma}]\, x$ (note que $\widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega} = u_{\varepsilon}|_{\partial\Omega}$) satisfaz

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}\|_{2,p} &= \sum_{|\beta|\leq 2} \left\|\partial^{\beta}\varphi\right\|_{p} = \|\widetilde{\varphi}\|_{p} + \left\|\frac{d\widetilde{\varphi}}{dx}\right\|_{p} + \left\|\frac{d^{2}\widetilde{\varphi}}{dx^{2}}\right\|_{p} \\ &= [(1+\varepsilon)^{\gamma} - \varepsilon^{\gamma}] \left[1 + (1+p)^{-1/p}\right] \leq 2^{\gamma} 2 < 4. \end{aligned}$$

Agora, é fácil ver que para quaisquer valores $p > 1$ e $\alpha > 2 - \frac{1}{p}$ existe $\gamma_{*} \in (0,1)$ tal que $\alpha > \frac{2-\frac{1}{p}-\gamma_{*}}{1-\gamma_{*}}$. Assim, as desigualdades $\|u_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq 2, \|b\|_{p} \leq \gamma_{*}^{1-\alpha} 2^{\beta/p} \beta^{-1/p}$ e $\|\varphi\|' \leq c_{0} \|\widetilde{\varphi}\|_{2,p} < 4c_{0}$ mantém-se uniformemente com relação a $\varepsilon \in (0,1)$.

Por outro lado,

$$\left\|\frac{d^{2}u_{\varepsilon}}{dx^{2}}\right\|_{p} = \gamma(1-\gamma)\left[\int_{0}^{1} (x+\varepsilon)^{(\gamma-2)p}\, dx\right]^{1/p} = \frac{\gamma(1-\gamma)}{-\theta}\left(\varepsilon^{\theta} - (1+\varepsilon)^{\theta}\right) \underset{\varepsilon\to 0^{+}}{\longrightarrow} \infty,$$

sendo $\theta = [(\gamma-2)\,p+1]$. Logo, $\|u\|_{2,p} \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0^{+}$. Contradição com o Teorema 6.1.3.

6.1.3 Resolubilidade

Além das condições $[F.1]$ e $[F.2]$, consideraremos também a chamada condição de Lipschitz,

$[F.3]$ f satisfaz,

$$|f(x,s,\eta) - f(x,s,\xi)| \leq b_{1}(x,s,\eta,\xi)\, |\eta - \xi|$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $(s,\eta,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}$. Aqui, a função b_{1} é Carathéodory e para qualquer $l > 0$ fixo, satisfaz

$$b_{1l}(.) = \sup_{|s|,|\eta|,|\xi|\leq l} b_{1}(.,s,\eta,\xi) \in L^{p}(\Omega).$$

Antes de passarmos ao primeiro resultado de existência, necessitaremos da seguinte definição

Definição 6.1.4 (***Dupla Sub-Supersolução Ordenada para* (6.1)**). *As funções $\bar{u}$ e $\hat{u}$ de $W^{2,p}(\Omega)$ constituirão uma dupla sub-supersolução para o problema* $(\mathbf{6.1})$ *se satisfizerem*

1) $-\Delta \hat{u} + f(x, \hat{u}, \nabla \hat{u}) \geq 0,\ q.t.p\,(\Omega)$,

2) $-\Delta \bar{u} + f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \leq 0,\ q.t.p\,(\Omega)$,

3) $\bar{u} \leq \hat{u}$ *em* Ω *e* $\bar{u} \leq \varphi \leq \hat{u}$ *na* $\partial\Omega$.

Doravante nos referiremos apenas a dupla sub-supersolução, suprimindo a palavra ordenada.

Definição 6.1.5 (***Operador de Truncamento***). *Seja* $(\bar{u}, \hat{u})$ *um dupla sub-supersolução para o problema* $(\mathbf{6.1})$. *Definimos* $T : W^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)$, *o operador de Truncamento, por,*

$$Tu(x) = \begin{cases} \hat{u}(x) & para\ u(x) > \hat{u}(x) \\ u(x) & se\ \bar{u}(x) \leq u(x) \leq \hat{u}(x) \\ \bar{u}(x) & caso\ u(x) < \bar{u}(x), \end{cases}$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Lema 6.1.6. *Suponha que a função* $F_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz a condição de Carathéodory e que*

$$\sup_{(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} |F_0(., s, \xi)| \in L^p(\Omega).$$

Então o problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u = F_0(x, u, \nabla u) & em\ \Omega \\ u = \varphi\ na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.9}$$

onde $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, *possui solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Prova. Seja $v \in C^1(\overline{\Omega})$ qualquer. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta u = F_0(x, v, \nabla v) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como sabemos, este problema, para cada $v \in C^1(\overline{\Omega})$, possui uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Defina então o operador $S : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)$ por $Sv = u$. Pela desigualdade para operadores elípticos,

$$\|u\|_{2,p} \leq c\left(\|\Delta u\|_p + \|\varphi\|'\right) \leq c\left(\left\|\sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} |F_0(., s, \xi)|\right\|_p + \|\varphi\|'\right) \leq \widetilde{c}. \tag{6.10}$$

Além disso, temos que S é um operador contínuo, pois dada uma seqüência (v_n), contida em $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, tal que $v_n \to v$ em $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, então, pelo fato de F_0 ser Carathéodory

$$\Delta u_n = F_0\left(x, v_n, \nabla v_n\right) \underset{q.t.p}{\longrightarrow} F_0\left(x, v, \nabla v\right) = \Delta u.$$

E, como naturalmente $u = \varphi$ na $\partial\Omega$, segue que $Sv_n \to Sv$, ou seja, S é contínuo.

Prosseguindo, sendo $W^{2,p}\left(\Omega\right) \overset{c}{\longrightarrow} C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, então o operador de imersão I é compacto. Logo, $S = I \circ S$ é compacto, pois é composta de compacto com contínuo. Assim, olhando para a desigualdade de imersão $\|u\|_{C^1\left(\overline{\Omega}\right)} \leq a\,\|u\|_{2,p}$ e para a desigualdade (6.10), vemos que existe uma bola $\overline{B_R\left(0\right)} \subset C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, de modo que $R > \widetilde{c}$ e S pode ser vista como uma aplicação de $\overline{B_R\left(0\right)}$ em $\overline{B_R\left(0\right)}$. Estamos em condições de aplicar o Lema (5.1.6) para concluir que S possui ponto fixo u, ou seja, $u \in W^{2,p}\left(\Omega\right)$ é solução de (6.9). ■

Para o próximo resultado, necessitaremos do seguinte problema de fronteira,

$$\begin{cases} \Delta u = f\left(x, Tu, \nabla u\right) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.11}$$

Neste caso, temos o

Lema 6.1.7. *Suponha que f satisfaça as condições $[F.1]$, $[F.2]$ e $[F.3]$ e φ em $W^{2-\frac{1}{p},p}\left(\partial\Omega\right)$. Considere $(\bar{u}, \hat{u})$ uma dupla sub-supersolução de (6.1) e seja u uma função de $W^{2,p}\left(\Omega\right)$, solução de (6.11). Então*

$$\bar{u}\left(x\right) \leq u\left(x\right) \leq \hat{u}\left(x\right) \;\; \textit{em } \overline{\Omega}.$$

Prova. Basta que mostremos a desigualdade acima para Ω pois após isso e através de um argumento de continuidade, passa-se facilmente a $\partial\Omega$.

Suponha, por absurdo, que o resultado não seja verdadeiro, isto é, que exista $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u\left(x_0\right) > \hat{u}\left(x_0\right) \text{ ou } u\left(x_0\right) < \bar{u}\left(x_0\right).$$

Digamos que $u\left(x_0\right) < \bar{u}\left(x_0\right)$. Considere a função $\omega\left(x\right) = \bar{u}\left(x\right) - u\left(x\right)$. Assim ω é contínua pois $\bar{u}$ e u o são e, além disso, sendo $\bar{u}$ subsolução de (6.1) então

$$\Delta\omega = \Delta\bar{u} - \Delta u \geq f\left(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}\right) - f\left(x, u, \nabla u\right) \text{ em } \Omega.$$

Por outro lado, considere $G = \{x \in \Omega;\ \omega(x) > 0\}$. $G \neq \emptyset$ $(x_0 \in G)$ e é aberto pois dado qualquer ponto x de G e sendo ω contínuo, segue pelo princípio da conservação do sinal que existe uma bola centrada em x tal que $\omega > 0$ nesta bola. Além destes fatos, temos que $\omega \equiv 0$ na ∂G pois se existir $\widetilde{x} \in \partial G$ tal que $\omega(\widetilde{x}) > 0$ então, por continuidade de ω, existirá uma bola centrada em $\widetilde{x}$ tal que $\omega > 0$ para todo ponto desta bola, ou seja, $\widetilde{x} \notin \partial G$. De modo semelhante $\widetilde{x} \in \partial G$ não pode ser tal que $\omega(\widetilde{x}) < 0$.

Prosseguindo, em G temos

$$f(x, Tu, \nabla u) = f(x, \bar{u}, \nabla u)$$

e assim

$$\Delta\omega \geq f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) - f(x, Tu, \nabla u) = f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) - f(x, \bar{u}, \nabla u) \text{ em } G.$$

No entanto, como f satisfaz $[F.3]$ temos

$$|f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) - f(x, \bar{u}, \nabla u)| \leq \widetilde{b}_1(x)\,|\nabla\omega|$$

onde $\widetilde{b}_1(x) = b_1(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x), \nabla u(x)) \in L^p(\Omega)$. De modo que obtemos

$$f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) - f(x, \bar{u}, \nabla u) \geq -\widetilde{b}_1(x)\,|\nabla\omega|.$$

Em resumo temos,

$$\begin{cases} -\Delta\omega - \widetilde{b}_1(x)\,|\nabla\omega| \leq 0 \text{ em } G \\ \omega = 0 \text{ na } \partial G \end{cases}$$

e o princípio do máximo de [3] nos permite concluir que $\omega \leq 0$ em G. Absurdo.

Caso $u(x_0) > \hat{u}(x_0)$, considere a função $\gamma(x) = u(x) - \hat{u}(x)$ e proceda de forma análoga ao exposto acima. ■

Teorema 6.1.8. *Suponha que f satisfaça as condições $[F.1]$, $[F.2]$ e $[F.3]$ para algum $p > n$ e que $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Além disso, suponha que exista uma dupla $(\bar{u}, \hat{u})$ sub-supersolução para o problema* (6.1). *Então o problema* (6.1) *possui solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e*

$$\bar{u} \leq u \leq \hat{u} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Prova. Seja $M = max \left\{ \underset{x\in\overline{\Omega}}{max}\, \hat{u}(x), -\underset{x\in\overline{\Omega}}{min}\, \bar{u}(x) \right\}$. Olhando para a função ψ obtida no Teorema 6.1.3, considere o número $\psi\left(M, \|b_M\|_p, \|\varphi\|'\right)$ e ponha

$$M_1 = c_2\psi\left(M, \|b_M\|_p, \|\varphi\|'\right),$$

onde c_2 é a constante da desigualdade de imersão $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq c_2 \|u\|_{2,p}$ (c_2 não depende de u). Por fim, considere $M_2 = max\left\{M_1, \|\nabla\bar{u}\|_\infty, \|\nabla\hat{u}\|_\infty\right\}$ e defina a função $F_1 : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ por

$$F_1(x,s,\xi) = \begin{cases} f(x,s,\xi) \text{ para } |\xi| \leq M_2 \\ f\left(x,s,\frac{M_2\xi}{|\xi|}\right) \text{ caso } |\xi| > M_2. \end{cases}$$

A função F_1 satisfaz $[F.1], [F.2]$, e $[F.3]$. Vejamos.

F_1 *satisfaz* $[F.1]$: Note que F_1 é contínua. Assim, pelo fato de f satisfazer $[F.1]$ segue, sem grande dificuldade, que F_1 também satisfaz $[F.1]$.

F_1 *satisfaz* $[F.2]$: Fixe $\xi_0 \in I\!R^n$. Se $|\xi_0| \leq M_2$, então

$$|F_1(x,s,\xi_0)| = |f(x,s,\xi_0)| \leq b(x,s)\left(1 + |\xi_0|^\alpha\right).$$

Agora, se $|\xi_0| > M_2$, então

$$|F_1(x,s,\xi_0)| = \left| f\left(x,s,\frac{M_2\xi_0}{|\xi_0|}\right)\right| \leq b(x,s)\left(1+M_2^\alpha\right) \leq b(x,s)\left(1+|\xi_0|^\alpha\right)$$

e isto mostra o procurado.

F_1 *satisfaz* $[F.3]$: A prova analítica é um pouco extensa e, por esta razão, não será posta aqui. No entanto, o leitor pode, geometricamente, aceitar este resultado.

Considere o problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u = F_1(x, Tu, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.12}$$

A função $\widetilde{F}_1 : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ dada por

$$\widetilde{F}_1(x,s,\xi) = \begin{cases} F_1(x,\hat{u}(x),\xi) \text{ para } s > \hat{u}(x) \\ F_1(x,s,\xi) \text{ se } \bar{u}(x) \leq s \leq \hat{u}(x) \\ F_1(x,\bar{u}(x),\xi) \text{ caso } \bar{u}(x) < s \end{cases}$$

é mensurável com relação a $x \in \Omega$ seja qual for $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ fixo, e contínua com relação a (s, ξ) para quase todo x. Além disso, fixando $x_0 \in \Omega$ temos, devido ao fato de que $|\hat{u}|, |\bar{u}| \leq M$,

$$\sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \left|\widetilde{F}_1(x_0, s, \xi)\right| = \begin{cases} \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |F_1(x_0, \hat{u}(x_0), \xi)| \leq b_M(x_0)(1 + M_2^\alpha) \text{ ou} \\ \sup\limits_{\substack{\bar{u}(x_0)\leq s\leq\hat{u}(x_0) \\ \mathbb{R}^n}} |F_1(x_0, s, \xi)| \leq b_M(x_0)(1 + M_2^\alpha) \text{ ou} \\ \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |F_1(x_0, \bar{u}(x_0), \xi)| \leq b_M(x_0)(1 + M_2^\alpha). \end{cases}$$

Como x_0 foi arbitrário, concluímos que

$$\sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \left|\widetilde{F}_1(., s, \xi)\right| \leq b_M(.)(1 + M_2^\alpha) \in L^p(\Omega).$$

Em resumo, temos que $\widetilde{F}_1$ satisfaz todas as exigências do Lema 6.1.6. Finalmente, temos que

$$\widetilde{F}_1(x, u(x), \nabla u(x)) = F_1(x, Tu(x), \nabla u(x))$$

trivialmente e, de posse da igualdade acima, podemos aplicar o Lema 6.1.6 ao problema (6.12) obtendo, assim, uma solução $\widetilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ deste problema.

Por outro lado, em virtude do fato de que $\|\nabla\hat{u}\|_\infty$ e $\|\nabla\bar{u}\|_\infty \leq M_2$, então $(\bar{u}, \hat{u})$ é uma dupla sub-supersolução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = F_1(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.13}$$

pois neste caso $F_1(x, u, \nabla u) = f(x, u, \nabla u)$. Com isso, podemos aplicar o Lema 6.1.7 ao problema (6.12) para obter que

$$\bar{u}(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq \hat{u}(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, destas desigualdades concluímos que $T\widetilde{u} = \widetilde{u}$, ou seja,

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{u} = F_1(x, T\widetilde{u}, \nabla\widetilde{u}) = F_1(x, \widetilde{u}, \nabla\widetilde{u}) \text{ em } \Omega \\ \widetilde{u} = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em palavras, temos que $\widetilde{u}$ é solução de (6.13) e mais, de $\bar{u} \leq \widetilde{u} \leq \hat{u}$ em $\overline{\Omega}$ temos que $\|\widetilde{u}\|_\infty \leq M$. Aplicando o Teorema 6.1.3 ao problema (6.13) obtemos

$$\|\widetilde{u}\|_{2,p} \leq \psi\left(M, \|b_M\|_p, \|\varphi\|'\right).$$

Da desigualdade de imersão temos que

$$\|\widetilde{u}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq c_2 \psi \left(M, \|b_M\|_p, \|\varphi\|' \right) = M_1$$

e disto sai que $\|\nabla \widetilde{u}\|_\infty \leq M_1 \leq M_2$, o que nos garante que $F_1 = f$, ou seja, (6.13) nada mais é do que (6.1). Conseqüentemente, $\widetilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ é solução de (6.1), como procurávamos. ■

6.1.4 O Princípio do Máximo e a Condição $[F.3]$

Seja $g : \Omega \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ uma função satisfazendo as condições de Carathéodory, isto é, mensurável com relação a x para todo $\xi \in I\!R^n$ e contínua com relação a ξ para quase todo $x \in \Omega$. Além disso, admita que para qualquer $l > 0$ fixo,

$$\sup_{|s| \leq l} |g(., \xi)| \in L^p(\Omega)$$

para algum $p > n$.

Agora, para uma $v \in W^{2,p}(\Omega)$ arbitrariamente fixada, consideraremos as seguintes desigualdades para $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$,

$$\begin{cases} \Delta\omega \geq g(x, \nabla v + \nabla\omega) - g(x, \nabla v) \text{ em } \Omega \text{ e} \\ \omega \leq 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.14}$$

Se a função g satisfaz apenas as condições mencionadas acima, então em geral não poderemos concluir que

$$\omega \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso, se trocarmos a condição de Lipschitz $[F.3]$ por uma condição de Hölder do tipo

$[F.4]$ $|f(x,s,\eta) - f(x,s,\xi)| \leq b_1(x,s,\eta,\xi) |\eta - \xi|^\lambda$, $0 < \lambda < 1$. Sendo b_1 a mesma função de $[F.3]$,

também não podemos concluir apenas destas informações que $\omega \leq 0$ em Ω (g no lugar de f). Ilustraremos este fato com um exemplo.

Para qualquer $0 < \lambda < 1$ e para qualquer $p > n$, a função

$$\omega(x) = 1 + |x|^{\alpha+1}$$

pertence a $W^{2,p}(\Omega)$, com $\alpha > \left(1 - \frac{n}{p}\right) / (1 - \lambda)$. Aqui, $\Omega = B_1(0) \subset I\!R^n$. Além disso, ω satisfaz

$$\begin{cases} \Delta\omega = g_0(x) |\nabla\omega|^\lambda \text{ em } \Omega \\ \omega = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $g_0(x) = -(1+\alpha)^{1-\lambda} (\alpha + n - 1) |x|^{\alpha(1-\lambda)-1} \in L^p(\Omega)$ (pois $[\alpha(1-\lambda) - 1]$ $p \geq 0$). Para $v \equiv 0$ e $g(x, \xi) = g_0(x) |\xi|^\lambda$ temos que as condições listadas acima são satisfeitas por g, ou seja, é Carathéodory, (6.14) e $[F.4]$. No entanto, facilmente pode-se ver que $\omega > 0$ em Ω.

6.1.5 Algumas Aplicações

Nesta subseção ilustraremos com alguns exemplos acadêmicos, a utilização dos resultados previamente estabelecidos.

Proposição 6.1.6. *Suponha que as condições $[F.1], [F.2]$ e $[F.3]$ sejam satisfeitas por f para algum $p > n$ e que a função fronteira $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Além disso, admita que existam dois números reais $\hat{t}$ e $\bar{t}$, $\hat{t} \geq \bar{t}$, para os quais*

$$f(x, \bar{t}, 0) \leq 0 \leq f\left(x, \hat{t}, 0\right) \text{ em } \Omega$$

e

$$\bar{t} \leq \varphi(x) \leq \hat{t} \text{ na } \partial\Omega.$$

Então o problema de fronteira (6.1) possui uma solução $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\bar{t} \leq \tilde{u} \leq \hat{t} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Prova. Defina $\hat{u} : \Omega \longrightarrow I\!R$ por $\hat{u}(x) = \hat{t}$ e $\bar{u} : \Omega \longrightarrow I\!R$ por $\bar{u}(x) = \bar{t}$. Afirmo que $(\bar{u}, \hat{u})$ formam uma dupla sub-supersolução para o problema (6.1). De fato,

$$-\Delta\hat{u} + f(x, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0 + f\left(x, \hat{t}, 0\right) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso, se $x \in \partial\Omega$,

$$\hat{u}(x) = \hat{t} \geq \varphi(x).$$

Analogamente para $\bar{u}$. Assim, aplicando o Teorema 6.1.8 temos que (6.1) possui uma solução $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ e que

$$\bar{t} \leq \tilde{u} \leq \hat{t} \text{ em } \overline{\Omega},$$

como queríamos mostrar. ■

Proposição 6.1.7. *Suponha que as condições* $[F.1], [F.2]$ *e* $[F.3]$ *sejam satisfeitas por* f *para algum* $p > n$ *e que* $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. *Além disso, suponha que existam números reais* $\hat{t}$ *e* $\bar{t}$, $\hat{t} \geq \bar{t}$, *para os quais*

$$f\left(x, \hat{t}\frac{|x|^2}{2}, \hat{t}x\right) \geq n\hat{t} \text{ em } \Omega \quad e \quad f\left(x, \bar{t}\frac{|x|^2}{2}, \bar{t}x\right) \leq n\bar{t} \text{ em } \Omega,$$

e

$$\bar{t}\frac{|x|^2}{2} \leq \varphi(x) \leq \hat{t}\frac{|x|^2}{2} \text{ na } \partial\Omega.$$

Então o problema (6.1) *possui solução* $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ *e*

$$\bar{t}\frac{|x|^2}{2} \leq \tilde{u} \leq \hat{t}\frac{|x|^2}{2} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Prova. Basta mostrar que $\bar{u} : \Omega \longrightarrow I\!R$ dada por $\bar{u}(x) = \bar{t}\frac{|x|^2}{2}$ e que $\hat{u} : \Omega \longrightarrow I\!R$ dada por $\hat{u}(x) = \hat{t}\frac{|x|^2}{2}$ constituem uma dupla sub-supersolução para o problema (6.1) e então aplicar o Teorema 6.1.8. ■

Considere agora, u_0 a solução do problema $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$ e ψ_1 alguma primeira autofunção do problema $\begin{cases} \Delta\psi + \lambda\psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$, com $\psi_1 > 0$ em Ω. Desta forma temos o

Teorema 6.1.8. *Suponha que as condições* $[F.1], [F.2]$ *e* $[F.3]$ *sejam satisfeitas por* f *para algum* $p > n$ *e que* $\varphi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. *Além disso, suponha que existam números reais* $\hat{t}$ *e* $\bar{t}$, $\hat{t} \geq \bar{t}$, *para os quais*

$$f\left(x, u_0(x) + \hat{t}\psi_1(x), \nabla u_0(x) + \hat{t}\nabla\psi_1(x)\right) + \lambda_1\hat{t}\psi_1(x) \geq 0, \ \forall x \in \Omega \ e$$
$$f\left(x, u_0(x) + \bar{t}\psi_1(x), \nabla u_0(x) + \bar{t}\nabla\psi_1(x)\right) + \lambda_1\bar{t}\psi_1(x) \leq 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Então o problema (6.1) *possui solução* $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ *e*

$$u_0(x) + \bar{t}\psi_1(x) \leq \tilde{u} \leq u_0(x) + \hat{t}\psi_1(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Prova. Defina $\hat{u} : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R$ por $\hat{u}(x) = u_0(x) + \hat{t}\psi_1(x)$ e $\bar{u} : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R$ de modo que $\bar{u}(x) = u_0(x) + \bar{t}\psi_1(x)$ e mostre que $(\bar{u}, \hat{u})$ constituem uma dupla sub-supersolução de (6.1). Então aplique o Teorema 6.1.8. ∎

6.2 A Equação $\mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u)$ $(p \leq n)$

Nesta seção trataremos Ω como um domínio limitado e regular em $I\!R^n$, $n \geq 2$. Estamos interessados em estudar a resolubilidade do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.15}$$

Para isto, novamente lançaremos mão do método de sub-supersolução.

6.2.1 Teorema Central

Começaremos impondo algumas hipóteses sobre a função f que aparece no problema (6.15). Ela deverá ser Carathéodory, isto é, $f : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ é mensurável na variável x, para todo $(s, \xi) \in I\!R \times I\!R^n$ e contínua com relação a (s, ξ), para quase todo $x \in \Omega$. Além disso, f deverá satisfazer

$$|f(x, s, \xi)| \leq g(x, s) + k|\xi|^\alpha,$$

com $k > 0$, g uma função Carathéodory e α uma constante positiva com restrições dadas mais abaixo.

O operador $\mathcal{L}$ do problema (6.15) esta na forma do divergente,

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

onde $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $b_i \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ e $div\ (b) \leq 0$, com $b = (b_1, ..., b_n)$.

Assumiremos também que $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico, isto é, que existe uma constante positiva θ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \ \forall\xi \in I\!R^n, \ \forall x \in \Omega. \tag{6.16}$$

Finalmente, suporemos que

(H_1) Para todo $r > 0$,

$$\sup_{|s|\leq r} |g(.,s)| \in L^p(\Omega),$$

(H_2) (a) Caso $n = 2$, então

$$1 < p < 2 \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < 2.$$

(b) Se $n \geq 3$, então

$$\frac{2n}{n+2} \leq p < \frac{n}{2} \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < \frac{n}{n-p}$$

ou

$$\frac{n}{2} \leq p < n \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < 2.$$

Neste momento, introduzimos a

DEFINIÇÃO 6.2.2 (***Dupla Sub-Supersolução Ordenada para*** (6.15)). *As funções $\bar{u}$ e $\hat{u}$ de $W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ constituirão uma dupla sub-supersolução para o problema* $(\mathbf{6.15})$ *se satisfizerem*

1) $-\mathcal{L}\hat{u} + f(x, \hat{u}, \nabla\hat{u}) \leq 0,\ q.t.p\,(\Omega)$,

2) $-\mathcal{L}\bar{u} + f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \geq 0,\ q.t.p\,(\Omega)$,

3) $\bar{u} \leq \hat{u}$ *em* Ω *e* $\bar{u} \leq 0 \leq \hat{u}$ *na* $\partial\Omega$.

Novamente, nos referiremos apenas a dupla sub-supersolução, suprimindo a palavra ordenada.

NOTA: A informação de que $\bar{u}$ e $\hat{u}$ devem estar em $W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é satisfeita também na Definição 6.1.4, devido ao teorema de imersão de Sobolev.

TEOREMA 6.2.3. *Suponha* (H_1) *e* (H_2). *Se existe uma dupla* $(\bar{u}, \hat{u})$, *sub-supersolução de* (6.15), *então* (6.15) *possui ao menos uma solução em* $W^{2,p}(\Omega)$. *Além disso, temos que* $\bar{u} \leq u \leq \hat{u}$.

Prova. Seja $p^* = \frac{np}{n-p}$. Como (H_2) está valendo, então $p^* \geq 2$. Além disso, é fácil ver que o intervalo $[\alpha p, p^*)$ é não-vazio. Agora, pelo Teorema 5.3.10 temos que, para qualquer $q \in [\alpha p, p^*)$,

$$W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,q}(\Omega),$$

já que, de $q < \frac{np}{n-p}$, obtemos $\frac{1}{q} > \frac{n-p}{np} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$.

Fixe $q_0 \in [\alpha p, p^*)$ e defina o operador $T : W^{1,q_0}(\Omega) \longrightarrow W^{1,q_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ por

$$Tu(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), \text{ caso } \hat{u}(x) \leq u(x), \\ u(x), \text{ se } \bar{u}(x) \leq u(x) \leq \hat{u}(x), \\ \bar{u}(x), \text{ para } u(x) \leq \bar{u}(x). \end{cases}$$

Sem grande dificuldade pode-se mostrar que T está bem definido (a cargo do leitor). Neste momento, considere as funções $\bar{U}$ e $\hat{U} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por,

$$\bar{U}(x) = \bar{u}(x) - \tilde{k} \text{ e } \hat{U}(x) = \hat{u}(x) + \tilde{k},$$

onde $\tilde{k} > 0$ foi escolhido de modo que $\bar{U} \leq -1$ e $\hat{U} \geq 1$ em $\overline{\Omega}$. Note que $T\bar{U} = \bar{u}$ e $T\hat{U} = \hat{u}$, já que $\hat{U} > \hat{u}$ e $\bar{U} < \bar{u}$ em $\overline{\Omega}$.

Considere a função $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(x) = max \left\{ -\mathcal{L}\hat{U}(x), \mathcal{L}\bar{U}(x), 1 \right\}.$$

Naturalmente, $a \geq 1$. Ademais, $a \in L^p(\Omega)$, uma vez que $|a(x)| \leq \left|\mathcal{L}\bar{U}\right| + \left|\mathcal{L}\hat{U}\right| + 1$ e cada uma destas funções estão em $L^p(\Omega)$.

Para cada $t \in [0, 1]$, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + (1-t)\, a(x)\, u = tf(x, Tu, \nabla Tu) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.17}$$

Pois bem, afirmo que $\left(\bar{U}, \hat{U}\right)$ constituem uma dupla sub-supersolução de (6.17) e mais, que para cada $t_0 \in [0, 1]$,

$$\bar{U} \leq u \leq \hat{U}, \tag{6.18}$$

seja qual for $u \in W^{2,p}(\Omega)$, solução de (6.17) vinculada a t_0. Provemos.

De fato, como $\bar{U} \leq -1$ e $\hat{U} \geq 1$ em $\overline{\Omega}$, então $\bar{U} \leq 0 \leq \hat{U}$ em $\overline{\Omega}$ (em particular na $\partial\Omega$). Além do mais, $\bar{U} \leq \hat{U}$ em Ω. Finalmente, em Ω

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\bar{U} + (1-t)\,a(x)\,\bar{U} &\leq \mathcal{L}\bar{U} - (1-t)\,a(x) \leq \mathcal{L}\bar{U} - (1-t)\,\mathcal{L}\bar{U} \\ &= t\mathcal{L}\bar{U} = t\mathcal{L}\bar{u} \leq tf(x,\bar{u},\nabla\bar{u}) = tf\left(x,T\bar{U},\nabla T\bar{U}\right).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\hat{U} + (1-t)\,a(x)\,\hat{U} &\geq \mathcal{L}\hat{U} + (1-t)\,a(x) \geq \mathcal{L}\hat{U} - (1-t)\,\mathcal{L}\hat{U} \\ &= t\mathcal{L}\hat{U} = t\mathcal{L}\hat{u} \leq tf(x,\hat{u},\nabla\hat{u}) = tf\left(x,T\hat{U},\nabla T\hat{U}\right).\end{aligned}$$

Mostramos, com isso, que $(\bar{u},\hat{u})$ é uma dupla sub-supersolução para (6.17). Vejamos então (6.18). Seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$ solução de (6.17) para $t = t_0$. Inicialmente, provemos que $u \leq \hat{U}$.

Defina $\omega : \Omega \longrightarrow I\!R$ por $\omega(x) = u(x) - \hat{U}(x)$. Note que $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$. A idéia é mostrarmos que $\omega \leq 0$ em Ω. Para isto, basta provar que a função $\omega^+(x) = max\ \{0,\omega(x)\}$ é nula em Ω. Sabemos que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u + (1-t_0)\,a(x)\,u &= t_0 f(x,Tu,\nabla Tu) \text{ em } \Omega \\ \mathcal{L}\bar{U} + (1-t_0)\,a(x)\,\bar{U} &\geq t_0 f\left(x,T\bar{U},\nabla T\bar{U}\right) \text{ em } \Omega.\end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro, encontramos

$$\mathcal{L}\omega + (1-t_0)\,a(x)\,\omega \leq t_0\left[f(x,Tu,\nabla Tu) - f\left(x,T\bar{U},\nabla T\bar{U}\right)\right] \text{ em } \Omega.$$

Multiplicando esta desigualdade por ω^+ e integrando sobre Ω, chegamos a (Ver observação abaixo)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\mathcal{L}\omega)\,\omega^+ + (1-t_0)\int_\Omega a(x)\,\omega\omega^+ &= \int_\Omega (\mathcal{L}\omega)\,\omega^+ + (1-t_0)\int_\Omega a(x)\left(\omega^+\right)^2 \qquad (6.19) \\ &\leq t_0\int_\Omega \left[f(x,Tu,\nabla Tu) - f\left(x,T\bar{U},\nabla T\bar{U}\right)\right]\omega^+.\end{aligned}$$

Desde que $\omega^+ = 0$ na $\partial\Omega$ e $p^* \geq 2$, temos que

$$\int_\Omega (\mathcal{L}\omega)\,\omega^+ dx \geq \theta\int_\Omega \left|\nabla\omega^+\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega div\ b.\left(w^+\right)^2 dx, \qquad (6.20)$$

sendo que aqui usamos (6.16).

Por outro lado, considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \Omega / \ u(x) \leq \hat{U}(x)\right\} \text{ e } B = \left\{x \in \Omega / \ u(x) > \bar{U}(x)\right\}.$$

Note que $A \cup B = \Omega$ e, sendo $\omega^+ = 0$ em A, a expressão em (6.19) fica reescrita apenas em B. Mas em B, $u(x) > \hat{U}(x) > \hat{u}(x)$. Logo $Tu = \hat{u}$ e, portanto,

$$\int_\Omega (\mathcal{L}\omega)\,\omega^+ \leq \int_B (\mathcal{L}\omega)\,\omega^+ + (1 - t_0)\int_B a(x)\left(\omega^+\right)^2 \leq 0.$$

Agora, aplicando (6.20) na desigualdade acima, resulta que

$$\theta \int_\Omega \left|\nabla \omega^+\right|^2 dx \leq \theta \int_\Omega \left|\nabla \omega^+\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega div\ \mathbf{b}.\left(w^+\right)^2 dx \leq 0,$$

e, conseqüentemente, $\omega^+ = 0$ em Ω. Através de um procedimento similar, temos que $\bar{U} \leq u$ em Ω, finalizando a prova de (6.18).

De volta ao tema central, considere $S : [0,1] \times W^{1,q_0}(\Omega) \longrightarrow W^{1,q_0}(\Omega)$ dada por

$$S(t, u) = v,$$

onde v é a solução do problema (única! pelo princípio do máximo de [3]),

$$\begin{cases} \mathcal{L}v + (1 - t)\,a(x)\,v = tf(x, Tu, \nabla Tu) \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.21}$$

Sem grande dificuldade temos, devido as hipóteses (H_1) e (H_2), que

$$f(., Tu, \nabla Tu) \in L^p(\Omega).$$

Assim, do problema (6.21) e da teoria L^p para equações elípticas (ver [11]), temos que v, solução de (6.21), pertence a $W^{2,p}(\Omega)$. Ora, pela resultado de imersão, $W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,q_0}(\Omega)$, concluímos que $v \in W^{1,q_0}(\Omega)$. Isto nos diz que S está bem definido. Além disso, temos que S é um operador compacto pois é contínuo e pode ser visto, devido a imersão compacta, como uma composição do próprio S com I, o operador de imersão, que é compacto.

Agora, procuraremos mostrar que, sempre que $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ for tal que $S(t, u) = u$ para algum $t \in [0,1]$, então teremos

$$\|u\|_{1,q_0} \leq C. \tag{6.22}$$

Perceba que, com isto demonstrado, poderemos usar o teorema de Leray-Schauder (Teorema 5.1.7) para garantirmos que existe $\tilde{u} \in W^{1,q_0}(\Omega)$ tal que

$$S(1, \tilde{u}) = \tilde{u},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{u} = f(x, T\tilde{u}, \nabla T\tilde{u}) \text{ em } \Omega \\ \tilde{u} = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\tilde{u} \in W^{1,q_0}(\Omega)$, temos que $f(., T\tilde{u}, \nabla T\tilde{u}) \in L^p(\Omega)$ e, pela teoria L^p para equações elípticas, concluímos que $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$. Além do mais, argumentando como na prova de (6.18), obtemos que, $\forall t \in [0,1]$ e $\forall u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ tal que $S(t,u) = u$, temos que

$$\bar{u} \leq u \leq \hat{u},$$

e, portanto, que $Tu = u$ (em particular que $T\tilde{u} = \tilde{u}$). Logo, $\tilde{u}$ é solução de (6.15), finalizando a prova.

Desta forma, basta-nos mostrar (6.22). Seja $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ de modo que $S(t_1, u) = u$ para algum $t_1 \in [0,1]$. Observe que, pela desigualdade para operadores elípticos (a constante $\tilde{C}$ não é, necessariamente, a mesma em cada desigualdade),

$$\|u\|_{1,q_0} \leq \tilde{C}\|u\|_{2,p} \leq \tilde{C}\|\mathcal{L}u\|_{2,p} \leq \tilde{C}\left(\|a\|_p\|u\|_\infty + \|g(.,Tu)\|_p + \||\nabla Tu|^\alpha\|_p\right), \tag{6.23}$$

onde t_1 foi suprimido pois é menor ou igual a um. Assim,

$$\|u\|_{2,p} \leq \tilde{C}\left(\|a\|_p\|u\|_\infty + \|g(.,Tu)\|_p + \||\nabla Tu|^\alpha\|_p\right).$$

Ora, sendo $vol\,\Omega < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $\forall r \geq 1$. Aplicando o Teorema 5.3.5 temos,

$$\frac{1}{\alpha p} = \frac{1}{n} + \lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{n}\right) + (1-\lambda)\frac{1}{r}, \quad \left(\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

de modo que $\lambda = \frac{nr - \alpha pr - \alpha pn}{\alpha(nr - 2pr - np)}$, e,

$$\|\nabla u\|_{\alpha p} \leq \tilde{C}\|u\|_{2,p}^{\lambda}\|u\|_r^{1-\lambda}.$$

Isto nos dá, em (6.23), que

$$\|u\|_{2,p} \leq \tilde{C}\left(1 + \|g(.,Tu)\|_p + \|u\|_{2,p}^{\lambda\alpha}\|u\|_r^{(1-\lambda)\alpha}\right),$$

onde usamos que $Tu = u$. Neste momento, perceba que, de (6.18), $\|u\|_r \leq \tilde{C}$ seja qual for $r \geq 1$, com a constante $\tilde{C}$ não dependendo de t. Além disso, de (H_2), podemos escolher r de tal forma que satisfaça $r \geq 1$ e $r(n-2p) < np$ (a cargo do leitor). De posse de tal r, temos

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{nr - \alpha pr - \alpha pn}{\alpha(nr - 2pr - np)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2r}{r+p} \leq \alpha \leq \frac{n}{n-p}.$$

Por outro lado, temos

$$\lambda\alpha < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{nr - 2pr - np}{nr - \alpha pr - \alpha pn} \Leftrightarrow \alpha < \frac{n+2r}{n+r}.$$

Em resumo, para quaisquer α e r satisfazendo

$$r \geq 1,\ r(n-2p) < np \text{ e } \frac{2r}{r+p} \leq \alpha < \frac{n+2r}{n+r}, \tag{6.24}$$

podemos afirmar que $\lambda\alpha < 1$ e, deste modo, que

$$\|u\|_{2,p} \leq \tilde{C}\left(1 + \|g(.,Tu)\|_p + \|u\|_{2,p}^{\lambda\alpha}\right) \leq \hat{C}\|u\|_{2,p}^{\lambda\alpha},$$

ou seja,

$$\|u\|_{2,p}^{1-\lambda\alpha} \leq \hat{C} \Rightarrow \|u\|_{2,p} \leq C,$$

seguindo daí o resultado. ∎

Observações: $i)$ O lado direito da desigualdade em (6.19) pode ser majorado por

$$\int_\Omega [g(x,Tu) + g(x,\hat{u})]\,\omega^+ dx + k\int [|\nabla Tu|^\alpha + |\nabla\hat{u}|^\alpha]\,\omega^+ dx.$$

No entanto, por (H_1) temos que $g(.,Tu) + g(.,\hat{u}) \in L^p(\Omega)$. Também temos, de (H_2) e do teorema de imersão de Sobolev, que $\omega^+ \in L^{p'}(\Omega)$, com p' o expoente conjugado de p. Desta forma, pela desigualdade de Hölder, nota-se que a primeira integral na expressão em destaque acima está bem postada. Da mesma forma, sendo $|\nabla Tu| \in L^{p^*}(\Omega)$, tem-se que

$$|\nabla Tu|^\alpha + |\nabla\hat{u}| \in L^{p^*/\alpha}(\Omega).$$

Denotando por β o expoente conjugado de $\frac{p^*}{\alpha}$, temos, mediante o fato de que $\alpha \leq \frac{np-n+2p}{n-p}$ (deriva de (H_2)), que $\omega^+ \in L^\beta(\Omega)$. Sendo assim, a segunda integral acima também está bem postada.

ii) Note que nossa solução de (6.15) satisfaz $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e, além disso, $u \in L^\infty(\Omega)$ uma vez que temos (6.18).

iii) Na prova do teorema impomos, para que $\lambda\alpha < 1$, as restrições

$$r \geq 1, \quad r(n-2p) < np \text{ e } \frac{2r}{p+r} \leq \alpha < \frac{n+2r}{n+r}. \tag{6.25}$$

No entanto, a fim de ficarmos de acordo com (H_2), vejamos como podemos "relaxar"as condições sobre α.

Considere as funções, definidas em $I\!R$, por

$$h_1(r) = \frac{2r}{p+r} \text{ e } h_2(r) = \frac{n+2r}{n+r}.$$

Não oferece a menor dificuldade mostrar que h_1 e h_2 são funções crescentes e que

$$\lim_{r\to+\infty} h_i(r) = 2, \ i = 1, 2.$$

Além disso, $h_1(1) < h_2(1)$ e em $\tilde{r} = \frac{np}{n-2p}$, $p \neq \frac{n}{2}$, temos que

$$h_1(\tilde{r}) = h_2(\tilde{r}) = \frac{n}{n-p}.$$

Desta forma, se tivermos que $2p < n$, então para qualquer valor de α entre $h_1(1)$ e $h_i(\tilde{r})$, $i = 1$ ou 2, isto é, para qualquer α satisfazendo

$$\frac{2}{p+1} \leq \alpha < \frac{n}{n-p},$$

pode-se encontrar $r \geq 1$ satisfazendo (6.25), veja figura ilustrativa.

Caso $2p > n$, então $\tilde{r}$ é um valor não positivo. Logo, escolhendo qualquer α entre $h_1(1)$ e 2, ou seja, qualquer α tal que

$$\frac{2}{p+1} \leq \alpha < 2,$$

pode-se encontrar ao menos um $r \geq 1$ satisfazendo (6.25). Finalmente, se $2p = n$, então os gráficos das funções h_1 e h_2 não se interceptam. Do mesmo modo, cabe a conclusão do caso $2p > n$.

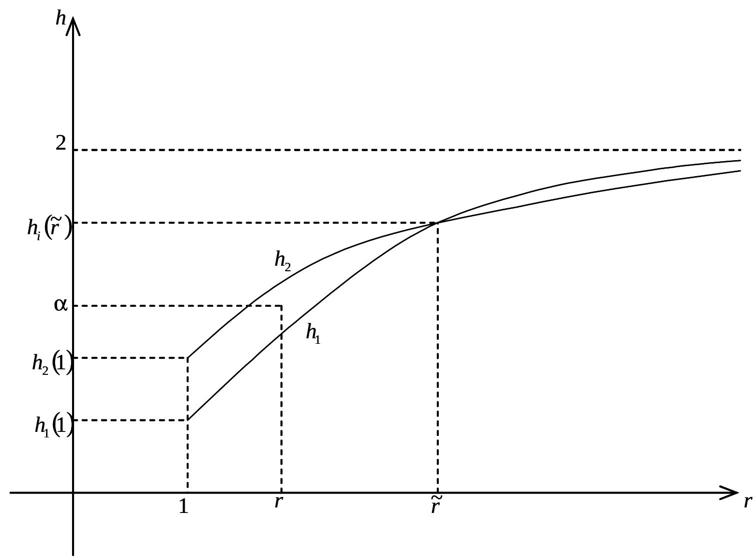

Figura 6.1: Caso $2p < n$.

6.2.4 Um Exemplo Acadêmico

A fim de finalizarmos este trabalho, dedicaremos esta breve seção a um exemplo simples porém útil pois justifica todo o montante teórico exposto na seção anterior.

Seja $n = 3$. Considere o problema quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = n(x) + u(\gamma - m(x)u) + (b(x).\nabla u)^{\alpha} \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.26}$$

onde $\gamma \in I\!R$ e $\frac{2}{3} \leq \alpha < 2$. Além disso, temos

(H) $m \in L^2(\Omega)$, $n \in L^{\infty}(\Omega)$, $b \in (L^{\infty}(\Omega))^3$, $n \geq 0$ e $m \geq m_0 > 0$.

O problema (6.26) está associado ao estudo da dinâmica de populações. A função m está ligada à aglomeração da população em estudo, enquanto que b e n são responsáveis, respectivamente, por efeito de transporte e vizinhança.

Voltando ao exemplo em si, sabemos que Δ é um operador elíptico em Ω e mais, que é uniformemente elíptico em Ω. Ademais, não é difícil mostrar que $f : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ dada por

$$f(x, s, \xi) = n(x) + s(\gamma - m(x)s) + (b(x).\xi)^{\alpha},$$

satisfaz as condições exigidas na seção anterior. Portanto, para podermos usar o teorema 6.2.3 (e concluir que (6.26) tem solução em $W^{2,p}(\Omega)$), devemos obter uma dupla sub-supersolução para (6.26).

Afirmo que existe $k > 0$ tal que $(\bar{u}, \hat{u}) = (0, k)$ é uma dupla sub-supersolução para (6.26). Vejamos rapidamente. Naturalmente,

$$\begin{aligned} -\Delta k - n(x) - k(\gamma - m(x)k) + (b(x).\nabla k)^{\alpha} &= -n(x) - k\gamma + m(x)k^2 \\ &\geq m_0 k^2 - k\gamma \geq 0, \end{aligned}$$

desde que $k \geq 0$ seja tal que $k \geq \frac{\gamma}{m_0}$. Os demais itens são triviais. Logo, de fato $(0, k)$ é uma dupla sub-supersolução para (6.26), como faltava mostrar.

Bibliografia

[1] Adams, Robert A. *Sobolev Spaces.* New York: Academic Press, 1975.

[2] Agmon, Shmuel. *The L^p Approach to the Dirichlet Problem.* Ann Scuola Norm. Sup. 13 (1959), 405-448.

[3] Aleksandrov, A. D. *Uniqueness Conditions and Estimates for the Solution of the Dirichlet Problem.* American Mathematical Society Translation (Serie 2) 68 (1968), 89-119.

[4] Amann, H. & Crandall, M. *On Some Existence Theorems for Semilinear Elliptic Equations.* Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779-790.

[5] Các, N. P. *Some Remarks on a Quasilinear Elliptic Boundary Value Problem.* Nonlinear Analysis 8 (1984), 697-709.

[6] Delgado, M. & Suárez, A. *Weak Solutions for Some Quasilinear Elliptic Equations by the Sub-supersolution Method.* Nonlinear Analysis 42 (2000), 995-1002.

[7] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Equações Elípticas não Lineares.* ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1977.

[8] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[9] Folland, G. - Introduction to Partial Differential Equations.

[10] Friedman, Avner. *Partial Differential Equations.* New York: Academic Press, 1969.

[11] Gilbarg, T. & Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977.

[12] Han, Qing & Lin, Hua. *Elliptic Partial Differential Equations.* New York: Courant Institute of Mathematical Science, New York University, 1997.

[13] Hounie, Jorge. *Teoria Elementar das Distribuições.* 12º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1979.

[14] Smoller, Joel. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Spring-Verlag - New York, 1982.

[15] Kazdan, J. L. & Kramer, R. J. *Invariant Criteria for Existence of Solutions to Second Order Quasilinear Elliptic Equations.* Comm. on Pure and Apllied Math. 31 (1978), 619-645.

[16] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Jonh Wiley & Sons.

[17] Kuelkamp, Nilo. *Introdução a Topologia Geral.* Florianópolis, Ed. da UFSC, 1988.

[18] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise, vol. I.* Projeto Euclides - IMPA, 1976.

[19] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev - Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos.* Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2000.

[20] Pohožaev, S. I. *On equations of the Form* $\Delta u = f\left(x, u, Du\right)$. American Mathematical Society 41 (1982), 269-280.

[21] Rudin,W. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, 1966.

[22] Sotomayor, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1979.

[23] Tortato, Tatiana. *Estimativas A-priori em Equações Diferenciais Elípticas e Aplicações.* Curitiba, Ed. da UFPR, 2005.

[24] Treves, T. - Basic Linear Partial Differential Equations.

[25] Xavier, J. B. M. *Some Existence Theorems for Equations of the Form* $-\Delta u = f(x,u,Du)$. Nonlinear Analysis 15 (1990), 59-67.

[26] Xavier, J. B. M. *A priori Estimates for the Equation* $-\Delta u = f(x,u,Du)$. Nonlinear Analysis 22 (1994), 1501-1509.

[27] Xavier, J. B. M. *A priori Estimates and Multiplicity Results for Equations of the Form* $-\Delta u = f(x,u,Du)$. Dynamic Systems and Applications 3 (1994), 489-500.

[28] Xavier, J. B. M. *Equações Diferenciais Parciais.* Notas de Aula, 2001.

[29] Ziqian, Yan. *A Note on the Solvability in* $W^{2,p}(\Omega)$ *for the equation* $-\Delta u = f(x,u,Du)$. Nonlinear Analysis 24 (1995), 1413-1416.